УДК 511.6.517.56

Т. Б. ЛАМЗИНА

НЕКОТОРЫЕ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ ПРИ $|z| < \infty$ ФУНКЦИЙ

1. Введение. В статье используются стандартные обозначения неванлинновской теории распределения значений мероморфных функций [1]. Кроме того, через $m_p(r, a, f)$ обозначена функция приближения мероморфной функции $f(z)$ к значению a в метрике $L_p[0,2\pi]$ [см. 2; 3], а $m(p, r, f) = \{m_p(r, \infty, f)\}^p$. Известно [3], что $m_p(r, a, f) \leqslant m_q(r, a, f)$, если $p < q$. При $p = 1$ $m_1(r, a, f) = m(r, a, f)$ есть неванлинновская функция приближения. Согласно результату Л. Альфорса [4] множество тех a, для которых $\varlimsup\limits_{r\to\infty} \{m(r, a, f)/\ln T(r, f)\} > 1/\sigma$ имеет нулевую меру Хаусдорфа размерности $\sigma(0 < \pi \leqslant 2)$. Отсюда вытекает очевидный факт: множество $\{a : \varlimsup\limits_{r\to\infty} m(r, a, f)/\psi(r)\ln T(r, f) > 0\}$, где $\psi(r) \to \infty$ при $r \to \infty$, имеет нулевую меру Хаусдорфа размерности σ при любом $\sigma > 0$. В статье показано, что это утверждение остается в силе, если функцию $m(r, a, f)$ заменить на $m_p(r, a, f)$. Имеет место.

Теорема 1. *Для мероморфной функции конечного порядка* ρ *и нижнего порядка* $\lambda > 0$ *множество*

$$V_\psi^p(f) = \{a : \varlimsup_{r\to\infty} m_p(r, a, f)/\psi(r)\ln T(r, f) > 0\}$$

имеет нулевую меру Хаусдорфа размерности σ *при любом* $\sigma > 0$, *каким бы ни были* $p \geqslant 1$ *и функция* $\psi(r) \to \infty$ *при* $r \to \infty$.

Наряду с величинами дефектов в последнее время для характеристики асимптотического поведения мероморфной функции рассматриваются величины отклонений $\beta_\alpha(a, f)$, мероморфной функции $f(z)$ от числа a, введенные В. П. Петренко [5—7]. Известен следующий результат относительно множества положительных величин отклонений $\Omega^{(\alpha)}(f) = \{a : \beta_\alpha(a, f) > 0\}$.

Теорема: А [5; 7]. *Множество* $\Omega^{(\alpha)}(f)$ *при* $\alpha = 1$ *не более чем счетно, если* $f(z)$ *имеет конечный нижний порядок и нулевую логарифмическую емкость при любом* $\alpha > 0{,}5$. Б [6; 8]. *Какими бы ни были числа* $0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$, $0 < \alpha < 1$, *существует мероморфная функция нижнего порядка* λ, *для которой множество* $\Omega^{(\alpha)}(f)$ *имеет мощность континуума.*

Следующая теорема характеризует множество $\Omega^{(\alpha)}(f)$ при $\alpha \leqslant 0{,}5$.

Теорема 2. *Пусть* $f(z)$ — *мероморфная функция конечного порядка и такая, что* $T(r, f) > \ln^{\tau} r\ (\tau > 2)$. *Тогда множество* $\Omega^{(\alpha)}(f)$ *для* $\alpha > 1/\tau$ *имеет нулевую меру Хаусдорфа размерности* σ *при любом* $\sigma > 0$.

Теорема 2 *получается из соотношения (2.33) [7] и теоремы 1 настоящей статьи с помощью неравенства Гельдера и метода работы [7]. Что касается оценки «снизу» множеств* $\Omega^{(\alpha)}(f)$ и $V_{\psi}^{p}(f)$, *то имеет место*

Теорема 3. *Для любого* ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$, *существует множество* C_0 *положительной логарифмической емкости и мероморфная функция* $f(z) = f_{C_0}(z)$ *порядка* ρ *такая, что множество*

$$D_p^{\alpha}(f) = \left\{a : \lim_{r \to \infty} m_p(r, a, f)/T^{\alpha}(r, f) > 0\right\}$$

при $p \geqslant p_0(f) > 1$ *и* $\alpha < C(p, f) < 1/3$ *включает в себя* C_0.

2. Доказательство теоремы 1.

Лемма 2.1 [4]. *Пусть* $g(t) \geqslant 0$ — *монотонно убывающая функция при* $t > 0$ *и* $g(t) \to \infty$ *при* $t \to 0$; $h(t) \geqslant 0$ — *непрерывная монотонно возрастающая функция и* $h(0) = 0$, *причем*

$$\int_{h=0} g(t)\, dh(t) < \infty.$$

Тогда для любой мероморфной функции $f(z)$ *неравенство*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(|f(re^{i\varphi}) - a|)\, d\varphi > \int_{h=0}^{h=1} g(t)\, dh(t)$$

выполняется при всех a, *кроме самого большого множества точек, для которого существует покрытие последовательностью кругов с радиусами* ρ_i, *удовлетворяющими оценке* $\sum_i h(\rho_i) < 6$.

Лемма 2.2. *Пусть* $f(z)$ — *мероморфная функция положительного нижнего порядка* λ, $0 < \gamma < 1$ — *произвольное число,* $r_n = n^{\gamma}$. *Какова бы ни была функция* $\psi(r) \to \infty$ *при* $r \to \infty$, *множество*

$$E = \left\{a : \overline{\lim_{n \to \infty}} [m_p(r_n, a, f] - \psi(r_n) \ln T(r_n, f)] \geqslant 0\right\}$$

имеет нулевую меру Хаусдорфа размерности σ *при любом* $\sigma > 0$.

Доказательство. Лемма будет доказана, если мы покажем, что для любого $\delta > 0$ существует покрытие множества E кругами, радиусы которых ρ_i таковы, что

$$\sum_i \rho_i^{\sigma} < \delta.$$

Пусть $\nu(r)=\{\psi(r)\ln T(r, f)\}^p$. Определим функцию из тождества $\varepsilon(r)$

$$\nu(r)=\frac{1}{\varepsilon(r)^\sigma}\int\limits_{t=0}^{\varepsilon(r)}\ln^{+p}\frac{1}{t}\,dt^\sigma=\frac{\sigma}{\varepsilon(r)^\sigma}\int\limits_0^{\varepsilon(r)}\ln^{+p}\frac{1}{t}t^{\tau-1}\,dt. \qquad (2.1)$$

Воспользуемся леммой 2.1, положив $g(t)=\ln^{+p}\frac{1}{t}\; nh(t)=\frac{t^\sigma}{\varepsilon_n^\tau}$, где $\varepsilon_n=\varepsilon(r_n)$. Будем иметь в виду, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^{+p}\frac{1}{|f(r_ne^{i\varphi})-a|}\,d\varphi<\frac{1}{\varepsilon_n^\tau}\int\limits_0^{\varepsilon n}\ln^{+p}\frac{1}{t}\,dt^\sigma=\nu(r_n),$$

или, после возведения в степень

$$1/p,\ m_p(r_n, a, f)<\psi(r_n)\ln T(r_n, f)$$

для всех a, за исключением самое большее множества E_n, для которого существует покрытие кругами с радиусами ρ_{in}, удовлетворяющими условию $\sum\limits_i\rho_{in}^\sigma<6\varepsilon_n^\sigma$. Исключительное множество E, очевидно содержится в объединении множеств E_n $(n>n_0)$.

Рассмотрим покрытие множества E, состоящее из объединения покрытий множеств E_n. Оно представляет собой последовательность кругов, для радиусов которых ρ_k выполняется

$$\sum_k\rho_k^\sigma=\sum_{n=n_0}^\infty\sum_i\rho_{in}^\sigma<6\sum_{n=n_0}^\infty\varepsilon_n^\sigma.$$

Покажем, что сумму справа можно выбором n_0 сделать сколь угодно малой. Из выражения [2.1] имеем[1]

$$\nu(r)=\ln^p\frac{1}{\varepsilon_{(r)}}\left[1+\frac{p}{\sigma}\frac{1}{\ln\frac{1}{\varepsilon_{(r)}}}+\ldots+\frac{p!}{\sigma^p}\frac{1}{\ln^p\frac{1}{\varepsilon_{(r)}}}\right]\leqslant$$

$$\leqslant 2\ln^p\frac{1}{\varepsilon_{(r)}}\ (r>r_0(p, \sigma)). \qquad (2.2)$$

С другой стороны, при $r>r_\varepsilon$

$$\nu(r)=\{\psi(r)\ln T(r, f)\}^p>(\lambda-\varepsilon)^p\psi^p(r)\ln^p r.$$

Отсюда и из формулы (2.2) получаем, что при $n>n_0(\gamma, \sigma)$

$$\varepsilon_n^\sigma<n^{-\psi(r_n)\gamma(\lambda-\varepsilon)\sigma/2}<1/n^2.$$

Значит, ряд $\sum\varepsilon_n^\sigma$ сходится. Поэтому для любого $\delta>0$ можно указать номер $n_0=n_0(\delta)$ такой, что $\sum\limits_{n=n_0}^\infty\varepsilon_n^\sigma<\delta/6$. Таким обра-

[1] Не уменьшая общности, будем считать p целым числом.

зом, для покрытия множества E имеем

$$\sum_k \rho_k^\sigma < 6 \sum_{n=n_0}^{\infty} \varepsilon_n^\sigma < \delta.$$

Лемма 2.3. *Пусть* $0 < \gamma < 1$, $r_n = n^\gamma$, $k \geqslant 2$ — *целое число. Тогда для* r, $r_n \leqslant r \leqslant r_{r+1}$ *и* $a = |a| e^{i\alpha}$, $0 \leqslant |a| \leqslant 2r$, *выполняется (буквы* K *с индексами означают положительные постоянные)*

$$\int_0^{2\pi} \left| \ln^k \left| \frac{r_n e^{i\theta} - a}{re^{i\theta} - a} \right| \right| d\theta \leqslant K_1 \frac{1}{r^{1/\gamma}}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Легко видеть, что достаточно рассмотреть случай вещественного $a > 0$, а интервал брать в пределах от 0 до π. Заметим еще, что так как $r_n > r - 1 \geqslant r/2$ при $r \geqslant 2$, то

$$d_n = \frac{r_{n+1} - r_n}{r_n} < \frac{\gamma}{n} = \frac{\gamma}{r_n^{1/\gamma}} < \frac{\gamma 2^{1/\gamma}}{r^{1/\gamma}} \tag{2.4}$$

Имеем

$$I = \int_0^{\pi} \left| \ln^k \left| \frac{r_n e^{i\theta} - a}{re^{i\theta} - a} \right| \right| d\theta = \int_0^{\pi} \left| \ln^k \left| 1 + \frac{(r_n - r) e^{i\theta}}{r (e^{i\theta} - a/r)} \right| \right| d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\pi} \ln^k \left(1 + \frac{d_n}{|e^{i\theta} - a| \; |} + \frac{d_n}{|e^{i\theta} - a | r_n|} \right) d\theta \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_0^{\pi/2} \ln^k \left(1 + \frac{d_n}{|e^{i\theta} - a | r|} + \frac{d_n}{|e^{i\theta} - a | r_n|} \right) d\theta.$$

Так как при $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ и $b > 0$ $|e^{i\theta} - b| \geqslant \sin\theta > \frac{2\theta}{\pi}$, то

$$I \leqslant 2 \int_0^{\pi/2} \ln^k \left(1 + \frac{2d_n}{\sin\theta} \right) d\theta < 2 \int_0^{\pi/2} \ln^k \left(1 + \frac{\pi d_n}{\theta} \right) d\theta = 2\pi d_n \times$$

$$\times \int_0^{1/2d_n} \ln^k \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) d\theta < 2\pi d_n \int_0^{\infty} \ln_k \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) d\theta = K_2 d_n.$$

Отсюда и из выражения (2.4) следует утверждение леммы. Заметим, что справедлива также оценка

$$\int_0^{2\pi} \left| \ln^k \left| \frac{re^{i\theta} - a}{r_n e^{i\theta} - a} \right| \right| d\theta \leqslant K_2 \frac{1}{r^{1/\gamma}}. \tag{2.5}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие два неравенства: если $k > 1$, то [см., например 9]

$$\left|\sum_{j=1}^{g} z_j\right|^k \leqslant g^{k-1} \sum_{j=1}^{g} \left|z_j\right|^k; \tag{2.6}$$

неравенство Гельдера: при $p > 1$

$$\left|\int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx\right| \leqslant \left\{\int_a^b |f_1(x)|^p\, dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_a^b |f_2(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx\right\}^{1-\frac{1}{p}},$$

где интервал (a, b) и функции f_1 и f_2 таковы, что интегралы существуют.

Приступим к доказательству теоремы. Запишем равенство Пуассона — Иенсена для функций $f(re^{i\theta}) - e^{i\omega}$ и $f(r_n e^{i\theta}) - e^{i\omega}$. Вычтем из первого второе и проинтегрируем по ω от 0 до 2π. Учитывая затем оценки

$$\operatorname{Re} \frac{2\mathrm{Re}^{i(\theta+\varphi)}(r - r_n)}{(\mathrm{Re}^{i\varphi} - re^{i\theta})(\mathrm{Re}^{i\varphi} - r_n e^{i\theta})} \leqslant \frac{2R\,|r - r_n|}{|R - r|\,|R - r_n|} \leqslant 4d_n;$$

$$\sum_{|c_i| \leqslant R} \ln\left|\frac{R^2 - \bar{c}_i r_n e^{i\theta}}{R^2 - \bar{c}_i re^{i\theta}}\right| \leqslant \sum_{|c_i| \leqslant R} \ln\left(1 + \frac{|c_i|\,|r - r_n|}{R^2 - |c_i|\,r}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|c_i| \leqslant R} \ln\left(1 + \frac{|r - r_n|}{r}\right) \leqslant n(R, C, f)\, d_n \leqslant K_3 T(2R, f)\, d_n,$$

где c_i — корни уравнения $f(z) - C = 0$, либо полюсы $f(z)$, а также выражение (2.4), получим соотношение

$$\ln^+|f(re^{i\theta})| \leqslant \ln^+|f(r_n e^{i\theta})| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{|a_\mu(\omega)| \leqslant R} \ln\left|\frac{re^{i\theta} - a_\mu}{r_n e^{i\theta} - a_\mu}\right| d\omega +$$

$$+ \sum_{|b_\nu| \leqslant R} \ln\left|\frac{r_n e^{i\theta} - b_\nu}{re^{i\theta} - b_\nu}\right| + K_4 T(2R, f) \frac{1}{r^{1/\gamma}},$$

где b_ν — полюсы функции $f(z)$, $a_\mu(\omega)$ — корни уравнения $f(z) - e^{i\omega} = 0$. Возведем обе части полученного неравенства в степень p и проинтегрируем по θ от 0 до 2π. Для оценки интегралов воспользуемся несколько раз неравенством Гельдера. Будем иметь

$$m(p, r, f) \leqslant m(p, r_n, f) + \sum_{(k_i)} C_{(k_i)} [\{m(2k_1 r_n f)\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{\frac{T(2R, f)}{r^{1/\gamma}}\right\}^{k_2} \left\{\int_0^{2\pi} \left|\sum_{|b_\nu| \leqslant R} \ln\left|\frac{r_n e^{i\theta} - b_\nu}{re^{i\theta} - b_\nu}\right|\right|^{4k_3} d\theta\right\}^{\frac{1}{4}} \times$$

$$\times\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{|a_\mu(\omega)|\leqslant R}\ln\left|\frac{re^{i\theta}-a_\mu}{r_ne^{i\theta}-a_\mu}\right|\right|^{4k_4}d\omega d\theta\right\}^{\frac{1}{4}}\Bigg].$$

Здесь знак $\sum\limits_{(k_i)}$ означает суммирование слагаемых, для которых $k_1+k_2+k_3+k_4=p$, при этом k_1 принимает значения $0, 1, \ldots p-1$, $k_2, k_3, k_4 - 0, 1, \ldots p$; $C_{(k_i)}$ — константы, зависящие от p и k_i. Для окончательной оценки интегралов воспользуемся неравенством (2.6) с $q=n(R, f)$ и $q=n(R, e^{i\omega}, f)\leqslant 2T(2R, f)+0(1)$, а затем — оценками (2.3) и (2.5). Будем иметь

$$m(p, r, f)\leqslant m(p, r_n, f)+K_5\frac{\{T(2R, f)\}^p}{r^{1/2\gamma}}\sum_{k_1=0}^{p-1}m^{\frac{1}{2}}(2k_1, r_n, f). \tag{2.7}$$

Обозначим через E_k множество тех a, для которых

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\{m(k, r_n, a, f)-\psi_1^k(r_n)\ln^kT(r_n, f)\}>0,$$

где $\psi_1(r)$ — монотонно растущая функция такая, что

$$\lim_{r\to\infty}\psi_1(r)/\psi(r)=0.$$

Согласно лемме 2.2. множества E_k имеют нулевую меру Хаусдорфа размерности σ, $\sigma>0$. Очевидно, множество $E=\bigcup\limits_{k=1}^{2p}E_k$ также имеет нулевую меру Хаусдорфа размерности σ, $\sigma>0$. Пусть $a\notin E$. Тогда при любом k, $1\leqslant k\leqslant 2p$, выполняется

$$m(k, r_n, a, f)\leqslant\psi_1^k(r_n)\ln^kT(r_n, f)+\varepsilon\,(r_n>r_\varepsilon).$$

Учитывая это, из соотношения (2.7), записанного для функции $f_1(z)=1/(f(z)-a)$, будем иметь при $r>r_0$

$$m_p(r, a, f)\leqslant\psi_1(r)\ln T(r, f)+K_6\frac{T^p(2R, f)}{pr^{1/2\gamma}}. \tag{2.8}$$

Если теперь выбрать $\gamma\leqslant 1/(2p\rho+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, то выражение (2.8) приведет к результату

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m_p(r, a, f)}{\psi(r)\ln T(r, f)}=0.$$

Теорема доказана.

3. При доказательстве теоремы 3 основной является идея, использованная для построения подобных примеров в работах [6; 10; 11]. Поэтому ограничимся лишь указанием искомого множества и искомых функций.

Рассмотрим канторово совершенное множество общего типа $E(p_0p_1\ldots)$ [см. 12, с. 158]. Аналитически его можно определить так:

$$E(p_0p_1p_2\ldots)=\left\{a:a=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_k(a)}{2^kp_1p_2\ldots p_k}\right\},$$

где $\omega_k(a)$ равно либо 0, либо $2p_k-1$.

Лемма 3.1. [12, с. 163]. *Для того чтобы множество $E(p_0 p_1 \ldots)$ имело положительную логарифмическую емкость, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log p_n. \tag{3.1}$$

Пусть $1 < \gamma < 2$. Положим $p_1 = e$, $p_{n+1} = p_n^{\gamma} = p_1^{\gamma^n}$ $(n \geqslant 1)$. Тогда ряд (3.1) сходится и, значит, согласно лемме 3.1 соответствующее канторово множество имеет положительную логарифмическую емкость. Искомым является множество

$$C_0 = C_0(\gamma) = \left\{ a : a = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k(a)}{2^k p_1 p_2 \ldots p_k} \right\},$$

где $\omega_k(a)$ значение $2p_k - 1$ принимает бесконечное число раз. Искомые функции принадлежат к классу функций типа примеров А. А. Гольдберга [см. 1; 6; 13]. Общий вид этих функций такой:

$$f(z) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n \psi_n (z e^{-i\varphi_n}) \right\} \Big/ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n (z e^{-i\varphi_n}) \right\},$$

где $c_n = \eta_n = K_7 / n \ln^2 (1 + n)$, $n = 1, 2, \ldots$; $\eta_0 = \eta_1$;

$$\varphi_n = \pi \sum_{\nu=0}^{n-1} \eta_\nu, \ \varphi_0 = 0, \ K_7 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 (1 + n)}.$$

Что касается последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, то для нашей теоремы она строится следующим образом.

Пусть натуральное число n в двоичном представлении имеет вид $n = \sum_{k=1}^{g(n)} \alpha_k 2^{k-1}$, $\alpha_k = 0; 1$. Тогда

$$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{g(n)} \frac{(2p_k - 1)\alpha_k}{2^k p_1 p_2 \ldots p_k}.$$

Функции $\psi_n(z)$ выбираются так. Для случая $\rho = 0$ $\psi_n(z) = G_n(z)$, где $G_n(z)$ построены в работе [8, с. 171]. При $\rho = 1$ $\psi_n(z) = e^z$ [1, с. 161]. Переход к случаю $0 < \rho \leqslant \infty$ осуществляется так же, как в книге [1, с. 164—166].

В заключение выражаю глубокую благодарность В. П. Петренко за постановку задач и ценные консультации, а также А. А. Гольдбергу за полезные замечания по доказательству теоремы 1.

Список литературы: 1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., Наука, 1970. 592 с. 2. *Проскурня И. П.* Исследование роста мероморфных функций с использованием метрики $L_p[0, 2\pi]$. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Харьков, 1972, вып. 16, с. 79—98. 3. *Гришин А. Ф.* О сравнении дефектов $\delta_p(a, f)$. — В кн.: Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного. Харьков, 1971, с. 54—56. 4. *Ahlfors L.* Ein Satz von Henri-Cartan und seine Anwendung auf die Theorie der meromorphen Funktionen. — Soc. Sci. Fenn. Comment Phys.-Math.. 1931, v. 5, N 16, p. 1—19. 5. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка. — Изв. АН СССР. Серия мат., 1969, т. 33, № 2, с. 414—454. 6. *Петренко В. П.* Изучение структуры множества положительных отклонений мероморфных функций. I. — Изв. АН СССР. Серия мат., 1969, т. 33, № 6, с. 1330—1348. 7. *Петренко В. П.* Изучение структуры множества положительных отклонений мероморфных функций. II. — Изв. АН СССР. Серия маг., 1970, т. 34, № 1, с. 31—56. 8. *Ламвина Т. Б.* О величинах отклонений мероморфных функций. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Харьков, 1971, вып. 14, с. 169—185. 9. *Vasić M. Petar, Kečkic D. Jovan.* Some inequalities for complex numbers. — Math Balkan, 1971, N 1, p. 282—286. 10. *Петренко В. П.* К вопросу о структуре множества положительных отклонений мероморфных функций. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Харьков, 1970, вып. 12, с. 86—94. 11. *Ламзина Т. Б.* О росте мероморфных функций и целых кривых. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Харьков, 1973, вып. 18, с. 202—215. 12. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М. — Л., ОГИЗ, 1941. 388 с. 13. *Гольдберг А. А.* О множестве дефектных значений мероморфных функций конечного порядка. — Укр. мат. журн., 1959, № 11, с. 438—443.

Поступила 19 марта 1976 г.