

В. А. КАКИЧЕВ

НЕТЕРОВОСТЬ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ,
ПРИВОДЯЩИХСЯ К БИСИНГУЛЯРНЫМ

1°. Пусть (ср. [1, 2]) Γ_j — замкнутый контур Ляпунова, ограничивающий в плоскости S_j комплексного переменного z_j область, содержащую начало координат; $D_j^- = S_j \setminus \overline{D_j^+}$; $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ — общий остов границ четырех биобластей $D^{\pm\pm} = D_1^\pm \times D_2^\pm$; I — тождественный, а S_j — сингулярный интегральный оператор вдоль Γ_j с ядром Коши $[\pi_i(\tau_j - t_j)]^{-1}$; $S_{12} = S_1 S_2$; $P_j^\pm = (I \pm S_j)/2$ и $P^{\pm\pm} = P_1^\pm P_2^\pm$ — операторы проектирования;

$$\begin{aligned} (S^a \varphi)(t_1, t_2) = & a_0(t_1, t_2) \varphi(t_1, t_2) + \frac{1}{\pi_i} \int_{\Gamma_1} \frac{a_1(t_1, \tau_1 t_2)}{\tau_1 - t_1} \varphi(\tau_1 t_2) d\tau_1 + \\ & + \frac{1}{\pi_i} \int_{\Gamma_2} \frac{a_2(t_1, t_2, \tau_2)}{\tau_2 - t_2} \varphi(t_1, \tau_2) d\tau_2 + \\ & + \frac{1}{(\pi_i)^2} \int_{\Gamma} \frac{a_{12}(t_1, \tau_1, t_2, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (1)$$

— действующий в $L_p(\Gamma)$, где $1 < p < +\infty$, полный бисингулярный оператор, коэффициенты которого a_0, a_1, a_2 и a_{12} на $\Gamma \times \Gamma$ удовлетворяют условию Гельдера;

$$a_{(k,l)}(t_1, t_2) = \hat{a}_0 + k\hat{a}_1 + l\hat{a}_2 + kl\hat{a}_{12}, \quad (2)$$

где $k = \pm 1, l = \pm 1$ и $\hat{a}_j = a_j|_{\tau_j = t_j, \tau_j = t_j, j = 0, 1, 2, 12}$, четыре функции, составляющие μ — символ оператора S^a ;

$$\begin{aligned} (a_0 \pm a_l)|_{\tau_j = t_l = t} \psi(t_j) + \frac{1}{\pi_i} \int \frac{(a_j \pm a_{12})|_{\tau_l = t_l = t}}{\tau_j - t_j} \psi(\tau_j) d\tau_j, \\ t_j \in \Gamma_j, t \in \Gamma_l, j \neq l, j, l = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

четыре однопараметрических (с параметром t) семейства полных сингулярных операторов, образующих σ -символ оператора \hat{S}^a , $\hat{S}^a = \hat{a}_0 I + \hat{a}_1 S_1 + \hat{a}_2 S_2 + \hat{a}_{12} S_{12}$ — характеристическая часть оператора S^a , совпадающая с оператором Римана

$$R_a = a_{(1,1)} P^{++} + a_{(-1,1)} P^{-+} + a_{(1,-1)} P^{+-} + a_{(-1,-1)} P^{--} \quad (4)$$

Будем говорить, что μ -символ оператора S^a , являющийся одновременно μ -символом оператора $\hat{S}^a = R_a$, обратим, если все

входящие в него функции $a_{(\pm 1, \pm 1)}(t_1, t_2)$ не обращаются в нуль на Γ , и что σ -символ оператора S^a обратим справа (слева), если при всех значениях параметра t обратимы справа (слева) все операторы (3), его составляющие.

Имеет место следующая [см. 1; 3; 4; 2; 5—7]

Теорема 1. Оператор S^a является Φ_+ (Φ_-)-оператором, если его μ -символ обратим, а σ -символ обратим справа (слева). В частности, если обратим μ -символ оператора $\hat{S}^a = R_a$ и $x_1^{+\pm} \underset{(<)}{\geq} x_1^{-\pm}$,

$x_2^{\pm+} \underset{(<)}{\geq} x_2^{\pm-}$, где $x_k^{\pm\pm}$ — индекс Коши по переменному t_k функции $a_{\pm 1, \pm 1}(t_1, t_2)$, то оператор $S^a = R_a$ есть Φ_+ (Φ_-)-оператор.

2°. Оператор S^a и сопряженный к нему оператор при $\Gamma = \{|t_1| = 1, |t_2| \approx 1\} = T_1 \times T_2 = T$ имеют одинаковое строение.

Однако оператор R_a^* , сопряженный к оператору R_a , имеет структуру [8], отличную от оператора (4), и методом, описанным в работах [8, 9], приводится к оператору вида (4), но уже с матричными коэффициентами 4-го (5-го) порядка, если его σ -символ обратим (может быть необратим).

Наиболее общий оператор \tilde{R} , объединяющий структуру операторов R_a и R_a^* линейный относительно проекторов P_k^{\pm} , содержит восемь слагаемых вида $aP_k^{\pm}bP_l^{\pm}cI$, где $k \neq l$, $k, l = 1, 2$, а функции a, b и c на Γ удовлетворяют условию Гельдера. Каждое слагаемое такого оператора содержит три сомножителя вида (4) и поэтому методом растяжения из работы [9] приводится к оператору (4) с матричными коэффициентами 17-го порядка, а его нетеровость может быть исследована с помощью теоремы 1. Заметим, что операторы \tilde{R} и \tilde{R}^* имеют одинаковое строение, и подробнее изучим более простой оператор

$$R_1 = a_0 P_1^+ A + b_0 P_1^- B = (a_0 P_1^+ + b_0 P_1^-) (P_1^+ A + P_1^- B) \equiv R_{11} R_{12}, \quad (5)$$

где

$$A = (a_1 P_2^+ + a_2 P_2^-) a_3 I \equiv A_{21} a_3 I, \quad B = (b_1 P_2^+ + b_2 P_2^-) b_3 I \equiv B_{21} b_3 I \quad (6)$$

и все коэффициенты a_j и b_j не обращаются в нуль на Γ .

Сначала отметим, что решение, например, уравнения $R_{11}\psi = h$ равносильно решению задачи Римана по переменному t_1 с параметром $t = t_2$. Если индекс x_1 функции b_0/a_0 по переменному t_1 положителен (отрицателен), то оператор R_{11} обратим справа

(слева), а обратный к нему оператор \hat{R}_{11}^{-1} содержит $|x_1|$ произвольных функций (условий разрешимости), зависящих от параметра $t = t_2$, и в него входит оператор вида $aI + bS_1 cI$ [см., например, 10, 11].

Далее для решения уравнения $R_1\varphi = h$ надо решить уравнение $R_{12}\varphi = \hat{R}_{11}^{-1}h$, равносильное системе уравнений

$$A\varphi + P_1^{-1}\chi = P_1^+\hat{R}_{11}^{-1}h; \quad B\varphi + P_1^+\chi = P_1^-\hat{R}_{11}^{-1}h$$

относительно функций φ и χ . Полагая здесь

$$u^\pm = P^\pm\hat{R}_{11}^{-1}h; \quad \xi = u^+ - P_1^-\chi, \quad \eta = u^- - P_1^+\chi,$$

легко убедимся в справедливости равенств

$$\varphi = a_3^{-1}\hat{A}_{21}^{-1}\xi = b_3^{-1}\hat{B}_{21}^{-1}\eta,$$

из которых следует, что функция χ удовлетворяет полному сингулярному интегральному уравнению

$$b_3^{-1}\hat{B}_{21}^{-1}P_1^+\chi - a_3^{-1}\hat{A}_{21}^{-1}P_1^-\chi = b_3^{-1}\hat{B}_{21}^{-1}u^- - a_3^{-1}\hat{A}_{21}^{-1}u^+, \quad (7)$$

зависящему от t_2 как от параметра. Нами доказана

Теорема 2. Решение уравнения $R_1\varphi = h$, где φ и h из $L_p\Gamma$, а оператор R_1 определен равенствами (5) и (6), равносильно последовательному обращению операторов R_{11} , A_{21} и B_{21} и решению полного сингулярного интегрального уравнения (7).

Аналогичным образом изучается оператор

$$R_2 = a_0P_2^+(a_1P_1^+ + a_2P_1^-)a_3I + b_0P_2^-(b_1P_1^+ + b_2P_1^-)b_3I,$$

«двойственный» к оператору R_1 . Если $\Gamma = T$, то оператор

$$a_0(P_k^+a_1 + P_k^-a_2)P_l^+a_3I + b_0(P_k^+b_1 + P_k^-b_2)P_l^-b_3I,$$

$$k \neq l, \quad k, l = 1, 2$$

при $k = 2$ ($k = 1$) является сопряженным к некоторому оператору R_1 (R_2) и, следовательно, может быть исследован на нетеровость с помощью теоремы 2.

3°. Пусть $p = 2$, $\Gamma_1 = \{|t_1| = 1\} = T_1$ ($\Gamma = T$), а коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_{12} оператора S^a и функция φ разлагаются в ряды Фурье по t_1 и τ_1 (по $t_1\tau_1$ и $t_2\tau_2$) с коэффициентами

$$A_r^0(t_2), A_{r\rho}^1(t_2), A_r^2(t_2, \tau_2), A_{r\rho}^{12}(t_2, \tau_2) \text{ и}$$

$$\Phi_r(t_2) (a_{rs}^0, a_{r\rho,s}^1, a_{r,s\sigma}^2, a_{r\rho,s\sigma}^{12} \text{ и } \varphi_{rs}).$$

Тогда действующему в $L_2(T_1 \times \Gamma_2)$ бисингулярному оператору (1) в тензорном произведении $\Lambda_2(\Gamma_2) = l_2 \otimes L_2(\Gamma_2)$ однозначно соответствует сингулярный оператор

$$(S_a\bar{\varphi})(t_2) \equiv A(t_2)\bar{\varphi}(t_2) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{C(t_2\tau_2)}{\tau_2 - t_2} \bar{\varphi}(\tau_2) d\tau_2, \quad t_2 \in \Gamma_2$$

с матричными коэффициентами

$$A(t_2) = \left(A_{r-\rho}^0(t_2) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{r-n, n-\rho}^1(t_2) \operatorname{sgn} n \right)_{-\infty < r, \rho < +\infty}$$

$$C(t_2 \tau_2) = \left(A_{r-\rho}^2(t_2, \tau_2) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{r-n, n-\rho}^{12}(t_2, \tau_2) \operatorname{sgn} n \right)_{-\infty < r, \rho < +\infty},$$

где $\operatorname{sgn} n = +1 (= -1)$ при $n \geq 0 (< 0)$, $\bar{a}_\rho(t_2) = \{\Phi_r(t_2)\}_{r=-\infty}^{+\infty}$ — элемент пространства $\Lambda_2(\Gamma_2)$ с нормой $\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma_2} |\Phi_r(t_2)|^2 |dt^2|)^{1/2} < +\infty$.

Оператору $S^a : L_2(T) \rightarrow L_2(T)$ в тензорном произведении $l_{22} = l_2 \otimes l_2$ однозначно соответствует его дискретный аналог

$$\begin{aligned} \tilde{S}^a \bar{\varphi} = & \left(\sum_{\rho=\sigma=-\infty}^{+\infty} \left\{ a_{r-\rho, s-\sigma}^0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{r-n, n-\rho, s-\sigma}^1 \operatorname{sgn} n + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{r-\rho, s-m, m-\sigma}^2 \operatorname{sgn} m + \sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} a_{r-n, n-\rho, s-m, m-\sigma}^{12} \operatorname{sgn} n \operatorname{sgn} m \right\} \times \right. \\ & \left. \times \varphi_{\rho\sigma} \right)_{-\infty < r, s < +\infty}, \end{aligned}$$

где последовательность $\bar{\varphi} = \{\varphi_{\rho\sigma}\}_{\rho, \sigma=-\infty}^{+\infty}$ имеет конечную норму

$$\left\{ \sum_{\rho, \sigma=-\infty}^{+\infty} |\varphi_{\rho\sigma}|^2 \right\}^{1/2}.$$

Итак, справедлива

Теорема 3. Операторы S_a и S^a (\tilde{S}^a, S_a и S^a), действующие соответственно в $\Lambda_2(\Gamma_2)$ и $L_2(T_1 \times \Gamma_2)$ ($l_{22}, \Lambda_2(T_2)$ и $L_2(T)$) эквивалентны между собой.

В силу теоремы 3 операторы S_a и \tilde{S}^a можно исследовать на нетеровость с помощью теоремы 1.

4°. В заключение приведем пять примеров (не всегда самого общего вида) операторов, порожденных свертками, и приводящихся соответствующим преобразованием Фурье к оператору вида (4). Решение уравнений с такими операторами, в конечном итоге, приводится к решению двумерных краевых задач Римана с левой частью вида [см. 1, 11]

$$\begin{aligned} & a_{(1,1)}(t_1, t_2) \Phi^{++}(t_1, t_2) + a_{(-1,1)}(t_1, t_2) \Phi^{-+}(t_1, t_2) + \\ & + a_{(1,-1)}(t_1, t_2) \Phi^{+-}(t_1, t_2) + a_{(-1,-1)}(t_1, t_2) \Phi^{--}(t_1, t_2), \end{aligned}$$

где $\Phi^{\pm\pm}(t_1, t_2)$ — предельные значения искомым функций $\Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2)$, аналитических в D^{++} , при $(z_1, z_2) \rightarrow (t_1, t_2) \in \Gamma$.

Сначала опишем примеры операторов $(A+B)P_1^+ + (A-B)P_1^-$, где A и B — сверточные операторы, зависящие от t_1 как от параметра. Конституальным (дискретным) преобразованием Фурье

$$(V_2 \varphi)(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t_1 \tau_2) e^{it_1 \tau_2} d\tau_2 t_1 \in \Gamma_1 t_2 \in R_2$$

$$((V_2\bar{\varphi})(t_1, t_2)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_k(t_1) t_2^k, \quad t \in \Gamma_1, t_2 \in T_2$$

по переменному t_2 (по индексу k) оператор, заданный соотношением

$$a_0(t_1) \varphi(t_1, t_2) + b_0(t_1) (S_1\varphi)(t_1, t_2) + \int_0^{+\infty} [a_1(t_1, t_2 - \tau_2) \varphi(t_1, \tau_2) + b_1(t_1, t_2 - \tau_2) (S_1\varphi)(t_1, \tau_2)] d\tau_2 + \int_{-\infty}^0 [a_2(t_1, t_2 - \tau_2) \varphi(t_1, \tau_2) + b_2(t_1, t_2 - \tau_2) (S_1\varphi)(t_1, \tau_2)] d\tau_2$$

бесконечной алгебраической системой

$$\sum_{k=0}^{+\infty} [a_{1, n-k}(t_1) \varphi_k(t_1) + b_{1, n-k}(t_1) (S_1\varphi_k)(t_1)] + \sum_{k=-\infty}^{-1} [a_{2, n-k}(t_1) \varphi_k(t_1) + b_{2, n-k}(t_1) (S_1\varphi_k)(t_1)],$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

при соответствующих предположениях относительно функций a_j и b_j (вектор-функций \bar{a}_j и \bar{b}_j) приводится к выражению (8) с коэффициентами

$$a_{(\pm 1, 1)} = a_0 \pm b_0 + V_2(a_1 \pm b_1), \quad a_{(\pm 1, -1)} = a_0 \pm b_0 + V_2(a_2 \pm b_2),$$

$$(a_{(\pm 1, 1)} = v_2(\bar{a}_1 \pm \bar{b}_1), \quad a_{(\pm 1, -1)} = v_2(\bar{a}_2 \pm \bar{b}_2)),$$

заданными на $\Gamma_1 \times \bar{R}_2$ (на $\Gamma_1 \times T_2$), где \bar{R}_2 — замыкание вещественной прямой R_2 одной бесконечно удаленной точкой, и, значит $D^{++} = D_1^+ \times \{\text{Im } z_2 \leq 0\}$ ($D^{\pm\pm} = D_1^{\pm} \times \{|z_2| \leq 1\}$).

Наконец, операторы, заданные свертками:

$$a) \lambda \varphi(t_1, t_2) + \int_0^{+\infty} [a_2(t_2 - \tau_2) \varphi(t_1, \tau_2) + \int_0^{+\infty} c_{11}(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) \times \\ \times \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1] d\tau_2 + \int_0^{+\infty} \left[a_1(t_1 - \tau_2) \varphi(\tau_1, t_2) + \int_{-\infty}^0 c_{12}(t_1 - \tau_1, \right. \\ \left. t_2 - \tau_2) \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \right] d\tau_1 + \int_{-\infty}^0 \left[b_2(t_2 - \tau_2) \varphi(t_1, \tau_2) + \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} c_{21}(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 \right] d\tau_2 + \int_{-\infty}^0 \left[b_1(t_1 - \tau_1) \varphi(\tau_1, t_2) + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^0 c_{22}(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \right] d\tau_1, \quad t_1 \in R_1, \quad t_2 \in R_2;$$

$$b) \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\lambda_{n-k} \varphi_k(t_2) + \int_0^{+\infty} a_{n-k}(t_2 - \tau_2) \varphi_k(\tau_2) d\tau_2 + \right.$$

$$+ \int_{-\infty}^0 c_{n-k} (t_2 - \tau_2) \varphi_k(\tau_2) d\tau_2 \Big] + \sum_{k=-\infty}^{-1} \left[\mu_{n-k} \varphi_k(t_2) + \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} b_{n-k} (t_2 - \tau_2) \varphi_2(\tau_2) d\tau_2 + \int_{-\infty}^0 d_{n-k} (t_2 - \tau_2) \varphi(\tau_2) d\tau_2 \right],$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, t_2 \in R_2;$$

$$в) \sum_{\rho, \sigma=0}^{+\infty} a_{r-\rho, s-\sigma} \varphi_{\rho\sigma} + \sum_{\rho=-\infty}^{-1} \sum_{\sigma=0}^{+\infty} b_{r-\rho, s-\sigma} \varphi_{\rho\sigma} +$$

$$+ \sum_{\rho=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=-\infty}^{-1} c_{r-\rho, s-\sigma} \varphi_{\rho\sigma} + \sum_{\rho, \sigma=-\infty}^{-1} d_{r-\rho, s-\sigma} \varphi_{\rho, \sigma}, \quad -\infty \leq r, s \leq +\infty,$$

преобразованиями Фурье: а) $V_1 V_2$, б) $v_1 V_2$, в) $v_1 v_2$, где V_j — континуальное, а v_j — дискретное преобразование Фурье по j -му аргументу, при соответствующих предположениях относительно искомого и известных элементов, приводятся к выражению (8) с коэффициентами соответственно равными: $a_{(1,1)}$, $a_{(-1,1)}$, $a_{(1,-1)}$, $a_{(-1,-1)}$.

а) $\lambda + V_1 a_1 + V_2 a_2 + V_1 V_2 c_{11}$, $\lambda + V_1 b_1 + V_2 a_2 + V_1 V_2 c_{21}$, $\lambda + V_1 a_1 + V_2 b_2 + V_1 V_2 c_{12}$, $\lambda + V_1 b_1 + V_2 b_2 + V_1 V_2 c_{22}$;

б) $v_1 \bar{\lambda} - v_1 V_2 \bar{a}$, $v_1 \bar{\mu} - v_1 V_2 \bar{b}$, $v_1 \bar{\lambda} - v_1 V_2 \bar{c}$, $v_1 \bar{\mu} - v_1 V_2 \bar{d}$;

в) $v_1 v_2 \bar{a}$, $v_1 v_2 \bar{b}$, $v_1 v_2 \bar{c}$, $V_1 V_2 \bar{d}$ и заданными на: а) $\tilde{R}_1 \times \tilde{R}_2$; б) $T_1 \times \tilde{R}_2$; в) $T_1 \times T_2$, а поэтому биобласти $D^{\pm\pm}$ имеют вид: а) $\{\text{Im } z_1 \geq 0, \text{Im } z_2 \geq 0\}$; б) $\{|z_1| \leq 1, \text{Im } z_2 \geq 0\}$; в) $\{|z_1| \geq 1, |z_2| \geq 1\}$.

Заметим, что всем рассмотренным здесь пяти операторам со свертками соответствует выражение (8), заданное на множестве гомеоморфном единичному тору с коэффициентами, по предположению, не обращающимися в нуль на Γ и удовлетворяющими условию Гельдера.

Исходя из приведенных здесь примеров нетрудно описать уравнения типа свертки, приводящиеся к операторам вида R_1 , R_2 , к операторам, им сопряженным, и, более общо, — к операторам вида \tilde{R} и S^a (см. 3°).

Список литературы: 1. *Какичев В. А.* О регуляризации сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши для билиндрических областей. — Изв. вузов. Математика, 1967, № 7 (62), с. 54—64. 2. *Какичев В. А.* Регуляризация и псевдрегуляризация полных бисингулярных операторов с ядрами Коши и нормальной характеристической частью. — ДАН СССР, 1979, т. 222, № 1, с. 19—22. 3. *Симоненко И. Б.* К вопросу о разрешимости бисингулярных и полисингулярных уравнений. — Функцион. анализ и его приложения, 1971, т. 5, вып. 1, с. 93—94. 4. *Пилиди В. С.* О бисингулярном уравнении в пространстве L_p . — Мат. исследования. Кишинев, 1972, т. 7, вып. 3, с. 167—175. 5. *Симоненко И. Б.* Операторы типа свертки в конусах. — Математика, 1967, т. 76 (116), № 2, с. 299—313. 6. *Симоненко И. Б.* О многомерных дискретных свертках. — Мат. исследования. Кишинев, 1968, т. 3, вып. 1, с. 107—122. 7. *Какичев В. А.* Нормальные характеристические бисингулярные операторы с ядрами Коши. — ДАН УССР. Серия А, 1977, № 7,

с. 587—591. 8. *Какичев В. А.* Обобщенный оператор Римана со многими проекторами.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Харьков, 1978, вып. 30, с. 54—57. 9. *Гохберг Н. Ц., Крупник Н. Я.* О сложных линейных сингулярных операторах.— Матем. исследования. Кишинев, 1969, т. 4, вып. 4, с. 20—32. 10. *Гахов Д. Д.* Краевые задачи. М., Наука, 1977. 11. *Какичев В. А.* Методы решения краевых задач линейного сопряжения для функций, голоморфных в бидицилиндрических областях.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Харьков, 1971, вып. 14, с. 3—15.

Поступила 30 января 1975 г.