УДК 517.566.5

М. И. КАДЕЦ, К. Д. КЮРСТЕН

СЧЕТНОСТЬ СПЕКТРА СЛАБО ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Функция $F(t)$, определенная на числовой оси R и принимающая значения в банаховом пространстве X, называется слабо почти-периодической (сл. п. п.), если для каждого линейного функционала $x^* \in X^*$ скалярнозначная функция $\langle x^*, F(t)\rangle$ является почти-периодической функцией Бора. Слабо почти-периодические функции изучали многие авторы, отчасти в связи с теорией дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, отчасти — как самостоятельный объект [1—2].

Спектром сл. п. п. функции $F(t)$ называется объединение спектров всех почти-периодических функций $\langle x^*, F(t)\rangle$, когда x^* пробегает все X^* (достаточно, впрочем, чтобы x^* пробегал плотное по норме подмножество в X^*. Счетность спектра сл. п.п. функций была ранее доказана лишь для некоторых классов банаховых пространств (X^* сепарабельно, X слабо секвенциально полно, X сепарабельно и сопряжено). Однако для произвольного банахова пространства вопрос о счетности спектра сл. п. п. функций оставался открытым.

Цель настоящей заметки — доказать счетность спектра сл. п. п. функции в общем случае. Множество значений сл. п. п. функции сепарабельно, и поэтому можно ограничиться рассмотрением сепарабельного банахова пространства X. Пространство всех почти-периодических функций Бора с естественной нормой обозначим AP.

Пусть задана сл. п. п. функция $F(t)$. С ее помощью определим линейные ограниченные операторы V и T, действующие согласно формулам

$$Vx^* = \langle x^*, F(t)\rangle; \ \langle x^*, T\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x^*, F(t)\rangle \varphi(t)\,dt; \ \varphi \in L^1(R).$$

По определению сл. п. п. функции оператор V действует из X^* в AP. Оператор T определен в $L^1(R)$, область его значений лежит в X^{**}. Мы покажем, что в действительности T отображает $L^1(R)$ в X.

Лемма 1. *Если функция $F(t): R \to X$ слабо непрерывна и ограничена, то линейный оператор T, определенный формулой*

$$\langle x^*, T\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x^*, F(t)\rangle \varphi(t)\,dt; \quad \varphi \in L^1(R)$$

отображает $L^1(R)$ в X.

Доказательство. Функция $F(t)$ отображает каждый компактный отрезок $[a, b] \subset R$ в слабо компактное подмножество K пространства X. Значения «усеченного» оператора T_n:

$$\langle x^*, T_n\varphi\rangle = \int_{-n}^{n} \langle x^*, F(t)\rangle \varphi(t)\,dt$$

при $\|\varphi\| \leqslant 1$ лежит в слабо замкнутой выпуклой оболочке множества K и следовательно принадлежат X. Таким образом, оператор T_n отображает $L^1(R)$ в X. Так как функция $F(t)$ ограничена на оси, $\|F(t)\| \leqslant A < \infty$, то

$$\left| \int_{-\infty}^{-n} + \int_{n}^{\infty} \langle x^*, F(t)\rangle \varphi(t)\,dt \right| \leqslant \|x^*\| \cdot A \cdot \left[\int_{-\infty}^{-n} + \int_{n}^{\infty} |\varphi(t)|\,dt \right],$$

и предельный переход от $T_n\varphi$ к $T\varphi$ также не выведет за пределы пространства X:

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n\varphi - T\varphi\| = 0; \quad \varphi \in L^1(R).$$

Итак, исходя из сл. п. п. функции $F(t)$, мы определили два линейных ограниченных оператора $V: X^* \to AP$; $T: L^1(R) \to X$, которые связаны коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[rr, "T^*"] \arrow[dr, "V"'] & & L^\infty(R) \\ & AP \arrow[ur, "J"'] & \end{tikzcd}$$

где J — естественное вложение AP в $L^\infty(R)$.

Пусть B^* — единичный шар пространства X^*. Тогда его образ $K = T^*B^*$ — слабо* компактное выпуклое подмножество в $L^\infty(R)$. Отождествляя множества K и VB^* ($K = JVB^*$), мы можем сказать, что K — выпуклое подмножество пространства $AP \subset L^\infty(R)$, компактное в топологии $\sigma = \sigma(L^\infty(R), L^1(R))$; заметим еще, что эта топология на K метризуема.

Лемма 2. *Произвольное множество $N \subset AP$ сепарабельно в том и только том случае, если объединение спектров почти-периодических функций, составляющих N, не более, чем счетно.*

Доказательство. Как известно, требуемое объединение спектров получится, если взять не все множество N, а лишь его плотное подмножество. Значит, сепарабельность N влечет счетность объединения спектров. Обратно, если объединение спектров счетно, то N лежит в сепарабельном подпространстве AP, натянутом на экспоненты, показатели которых λ пробегают объединение спектров.

Теорема 1. *Слабо почти-периодическая функция со значениями в банаховом пространстве имеет не более, чем счетный спектр.*

Доказательство. Согласно лемме 2 нам нужно доказать сепарабельность множества $K \subset AP \subset L^\infty(R)$ в сильной топологии. Допустим, что K несепарабельно. Выделим подмножество $\Delta \subset K$, обладающее двумя свойствами: а) в топологии σ множество Δ гомеоморфно счетному произведению двоеточий D^ω (канторову дисконтинууму) и б) каждое несчетное подмножество Δ несепарабельно по норме. Аналогичное построение было проведено в [4].

Пусть μ — мера на Δ, индуцированная мерой Хаара, определенной на группе D^ω. Рассмотрим банахово пространство $L^1(\Delta, \mu)$ и линейный ограниченный оператор $S: L^1(\Delta, \mu) \to L^\infty(R)$, определенный формулой

$$\langle S\psi, \varphi \rangle = \int_{\Delta} \langle f, \varphi \rangle \psi(f)\, d\mu(f); \quad \psi \in L^1(\Delta, \mu); \quad \varphi \in L^1(R).$$

В действительности S отображает $L^1(\Delta, \mu)$ в $AP \subset L^\infty(R)$, поскольку множество Δ содержится в слабо компактном выпуклом множестве K, целиком лежащем в AP. Обозначим через $G \subset AP$ сильное замыкание множества $SL^1(\Delta, \mu)$. Так как $L^1(\Delta, \mu)$ сепарабельно, то и G сепарабельно. Обозначим через Λ объединение спектров всех почти-периодических функций, составляющих G; Λ — счетное множество. Образуем наименьший модуль $M \supset \Lambda$ и через H обозначим сепарабельное подпространство AP, составленное из функций, чьи показатели Фурье принадлежат M.

Введем некоторые линейные операторы, связанные с методом суммирования Бохнера — Фейера рядов Фурье почти-периодических функций. Пусть $\{K_m(t)\}_1^\infty$ — последовательность ядер Бохнера — Фейера, реализующая суммирование рядов Фурье функций из H. Для каждого m определим последовательность линейных операторов P_{mn}, $n=1, 2, \ldots$, действующих в пространстве $L^1(R)$:

$$<f, P_{mn}\varphi> = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}\int\limits_{-n}^{n} K_m(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right] f(t)\,dt;\quad f\in L^\infty(R). \tag{1}$$

Очевидно, $<f, P_{mn}\varphi> \equiv <P^*_{mn}f, \varphi>$ — непрерывная в топологии σ функция от f (при фиксированном $\varphi\in L^1(R)$). Перейдем к пределу в (1) при $n\to\infty$, считая при этом $f\in AP$ (иначе нельзя гарантировать сходимость):

$$\lim_{n\to\infty} <P^*_{mn}f, \varphi> = <P_m f, \varphi>;\ f\in AP,\ \ \varphi\in L^1(R). \tag{2}$$

Если теперь перейти к пределу при $m\to\infty$, то получим

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} <P^*_{mn}f, \varphi> = <pf, \varphi>, \tag{3}$$

где оператор P, как это следует из свойств метода Бохнера — Фейера,— проектор с единичной нормой, проектирующий AP на H. Пусть теперь $f\in\Delta\subset AP$. При каждом фиксированном $\varphi\in L^1(R)$ функции $<f, P_{mn}\varphi>$ непрерывны на Δ в топологии σ, а функции $<P_m f, \varphi>$ и $<Pf, \varphi>$ принадлежат соответственно первому и второму классам Бэра; кроме того они ограничены в совокупности. Используя предельные соотношения (2) и (3), установим следующее тождество:

$$\int\limits_\Delta <Pf-f>\psi(f)\,d\mu(f)\equiv 0;\quad \psi\in L^1(\Delta, \mu). \tag{4}$$

Действительно,

$$\int\limits_\Delta <Pf, \varphi>\psi(f)\,d\mu(f) = \int\limits_\Delta \lim_{m,n} <f, P_{mn}\varphi>\psi(f)\,d\mu(f) =$$
$$= \lim_{mn}\int\limits_\Delta <f, P_{mn}\varphi>\psi(f)\,d\mu(f) = \lim_{m,n} <S\psi, P_{mn}\varphi> =$$
$$= <PS\psi, \varphi>.$$

Тождество (4) доказано, поскольку $S\psi\in G\subset H$ и значит $RS\psi = S\psi$ для всех $f\in\Delta$.

Из (4) следует, что $Pf=f$ на подмножестве $\Delta_1\subset\Delta$ полной меры. Это подмножество несчетно и, согласно свойству (б) из определения множества Δ, несепарабельно. С другой стороны, множество значений оператора P сепарабельно. Мы получили противоречие, доказывающее теорему.

Счетность спектра сл. п. п. функций, установленная в теореме 1, позволяет распространить подход, связанный с компактификацией числовой оси, и на сл. п. п. функции. Пусть $F(t)$ — сл. п. п. функция; $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — ее спектр; M — наименьший модуль, содержащий спектр. С помощью этого модуля мы можем обычным для теории почти-периодических функций способом наделить ось R топологией, относительно которой она станет предкомпактной метризуемой группой Ω_M; ее пополнение обозначим T_M. Функция $F(t)$ на Ω_M будет слабо равномерно непрерывной (т. е. будет равномерно непрерывной каждая функция $\langle x^*, F(t)\rangle$, $x^* \in X^*$. Ее можно доопределить по непрерывности на T_M, но при этом ее значения на $T_M \setminus \Omega_M$ могут не принадлежать X (они будут принадлежать слабо секвенцциальному замыканию X в X^{**}. В рамках этого подхода легко получаются следующие утверждения.

Следствие 1. *Множество значений сл. п. п. функции метризуемо в слабой топологии пространства X.*

Следствие 2. *Для того чтобы слабо непрерывная функция $F(t)$ была слабо почти-периодической, необходимо и достаточно, чтобы из каждой последовательности $\{s_n\} \subset R$ можно было извлечь подпоследовательность $\{t_n\}$ такую, что последовательность сдвигов $\{F(t+t_n)\}$ равномерно на R слабо фундаментальна.*

Замечание 1. Функция $F(t): R \to X$ называется сл. п. п. функцией Безиковича, если для каждого $x^* \in X^*$ функция $\langle x^*, F(t)\rangle$ является почти-периодической Безиковича (см. [3], стр. 142). Оказывается, теорема 1 не распространяется на функции Безиковича.

Пример 1. Определим функцию $F(t) = \exp(ixt)$, $t \in R$, $x \in [0, 1]$. Можно показать, что $F(t)$ — сл. п. п. функция Безиковича со значениями в $C[0, 1]$ и с несчетным спектром (ее спектр заполняет отрезок $[0, 1]$).

Замечание 2. Метод, примененный при доказательстве теоремы 1, может применяться и в других ситуациях. Например, может быть доказана следующая

Теорема 2. *В пространстве C^*, сопряженном к банахову пространству $C = C[0, 1]$, выделим замкнутое подпространство E, образованное всеми чисто атомными мерами. Если выпуклое слабо компактное подмножество $K \subset C^*$ целиком лежит в E, то оно сепарабельно.*

Список литературы: 1. *Amerio L., Pzouse G.* Almostperiodic functions and functional eguations. N. Y., 1971. 243 p. 2. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М., Изд-во Моск. ун-та, 1978. 205 с. 3. *Димитров Д. Б., Кадец М. И.* О слабо почти-периодических функциях.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1972, вып. 16, с. 150—152. 4. *Stagall C.* The Radon — Nikodym property in conjugate Banach spaces.— Trans. Amer. Math. Soc., 1975, vol. 206, p. 213—233.

Поступила 11 мая 1978 г.