УДК 517.566

А. Я. ГОРДОН

ПРИМЕР АНАЛИТИЧЕСКОГО ПОТОКА НА ТОРЕ СО СМЕШАННЫМ СПЕКТРОМ

Пусть α — иррациональное число, $F(x, y) > 0$ — аналитическая функция на плоскости R^2, такая, что $F(x+1, y) = F(x, y) = F(x, y+1)$. Рассмотрим динамическую систему на торе $T^2 = R^2/Z^2$, заданную системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{F(x, y)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{F(x, y)} \quad (x \bmod 1, \ y \bmod 1). \tag{1}$$

В настоящей заметке строится пример потока (1) с аналитической F и смешанным спектром (пример с непрерывной F известен [2]). Этот результат дает ответ на вопрос, поставленный в [3] (где от F требуется хотя бы C^1 — гладкость), и показывает, что высказанная в [1] гипотеза, согласно которой спектр аналитической динамической системы (1) является либо чисто точечным, либо чисто непрерывным, несправедлива.

Мы будем обозначать через $\|x\|$ расстояние от вещественного числа x до ближайшего целого. Множество иррациональных α, у которых

$$r(\alpha) = \liminf_{m \to \infty} \sqrt[m]{\|m\alpha\|} = 0, \tag{2}$$

обозначим через I. Имеет место

Теорема 1. *Для всякого $\alpha \in I$ найдется аналитическая функция $F(x, y) > 0$ на торе $T^2 = R^2/Z^2$, такая, что соответствующий поток (1) обладает смешанным спектром.*

Доказательство. 1°. Сопоставим каждой непрерывной функции $F(x, y) > 0$ на T^2 функцию $\tau(x)$ на $S^1 = R/Z$, полагая

$$\tau(x) = \int_0^1 F(x + \alpha y, y)\, dy. \tag{3}$$

Согласно [3], число $2\pi\lambda$ тогда и только тогда является собственным значением потока (1), когда функциональное уравнение

$$\varphi(x + \alpha) = \exp(2\pi i \lambda \tau(x))\, \varphi(x) \tag{4}$$

имеет нетривиальное измеримое решение $\varphi(x)$.

Мы построим такую аналитическую 1-периодическую функцию $\tau(x) > 0$, что уравнение (4) нетривиально разрешимо в классе измеримых функций для всех целых λ и только для них.

Согласно [3], найдется аналитическая функция $F(x, y) > 0$ на торе, связанная с $\tau(x)$ соотношением (3). У соответствующего потока (1) точечная компонента спектра есть $2\pi \boldsymbol{Z}$, и значит, спектр является смешанным (если бы он был чисто точечным, то в силу (4) поток (1) был бы метрически изоморфен обладающему тем же чисто точечным спектром потоку $dx/dt = 1$ на окружности $S^1 = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$, что невозможно).

2°. Итак, наша цель — построить функцию $\tau(x)$ с указанными выше свойствами. Дальнейшее построение развивает конструкцию [3].

Для каждого $n \in \boldsymbol{N}$ (через $\boldsymbol{N}$ обозначен натуральный ряд) определим 1-периодическую функцию $\tilde{u}_n(x)$, графиком которой на отрезке $[0, 1]$ является ломаная с вершинами $(0, 0)$, $(2^{-n}, 1)$, $(3^{-1}, 1)$, $(3^{-1} + 2^{-n}, 0)$, $(1, 0)$. Зафиксируем вещественный тригонометрический полином

$$u_n(x) = \sum_{|k| \leqslant N_n} c_k^{(n)} \exp(2\pi i k x) \, (c_{-k}^{(n)} = \overline{c_k^{(n)}}),$$

такой, что

$$|u_n(x) - \tilde{u}_n(x)| < 2^{-n} \quad (x \in [0, 1]). \tag{5}$$

Далее будут индукцией по $n \geqslant 1$ построены числа $\delta_n > 0$, $q_n \in \boldsymbol{N}$, $k_n \in \boldsymbol{N}$ и тригонометрические полиномы:

$$v_n(x) = u_n(q_n x); \tag{6}$$

$$g_n(x) = v_1(x) + v_2(x) + \ldots + v_n(x); \; w_n(x) = v_n(x + \alpha) - v_n(x); \tag{7}$$

$$f_n(x) = w_1(x) + w_2(x) + \ldots + w_n(x). \tag{8}$$

На n-м шаге, исходя из уже построенных $g_{n-1}(x)$, $w_{n-1}(x)$, k_{n-1} $(g_0(x) = 1, \; w_0(x) = 1, \; k_0 = 1)$, построим числа δ_n, q_n, k_n и тем самым полиномы v_n, g_n, w_n, f_n.

1) Выберем столь малое $\delta_n \in (0, 1/n)$, что

$$|g_{n-1}(x + \beta) - g_{n-1}(x)| < 1/n \quad \text{при} \quad \|\beta\| < \delta_n. \tag{9}$$

2) Полагая $C_n = \sum\limits_{|k| \leqslant N_n} |2\pi k c_k^{(n)}|$, найдем такое q_n, что

а) $1/3q_n < \delta_n$; **(10)** б) $C_n \exp(2\pi N_n q_n) \|q_n \alpha\| < 2^{-n}$; **(11)**

$$\text{в)} \; C_n \|q_n \alpha\| < \min(2^{-1} |w_{n-1}(\cdot)|_0, \; 1/n k_{n-1}) \tag{12}$$

(через $|f(\cdot)|_b$ мы обозначаем $\sup\{|f(x + iy)| : |\operatorname{Im} y| \leqslant b\}$; выполнимость (б) вытекает из (2)).

3) Выберем k_n так, чтобы

$$\|k_n \alpha - 1/3q_n\| < \min(\delta_n - 1/3q_n, \; 1/n q_n) \tag{13}$$

(правая часть положительна в силу (10)); n-й шаг построения закончен.

3°. Установим некоторые свойства построенных объектов. Из равенства $w_n(z) = u_n(q_n z + q_n \alpha) - u_n(q_n z)$ легко вывести, что

$$|w_n(\cdot)|_b \leqslant C_n \exp(2\pi N_n q_n b) \| q_n \alpha \|,$$

откуда, в силу (11) и (12), имеем:

$$|w_n(\cdot)|_1 < 2^{-n}; \tag{14}$$

$$|w_n(\cdot)|_0 < 2^{-1} |w_{n-1}(\cdot)|_0; \tag{15}$$

$$k_{n-1} |w_n(\cdot)|_0 < 1/n. \tag{16}$$

Из (16) и многократно примененного (15) вытекает:

$$k_{n-1}(|w_n(\cdot)|_0 + |w_{n+1}(\cdot)|_0 + \ldots) < 2/n. \tag{17}$$

Далее, из (13) получаем:

$$\| k_n \alpha \| < 1/3q_n + (\delta_n - 1/3q_n) = \delta_n; \tag{18}$$

$$\| q_n k_n \alpha - 1/3 \| < 1/n. \tag{19}$$

4°. В силу (14) последовательность (8) равномерно в полосе $|\operatorname{Im} z| < 1$ сходится к некоторой аналитической 1-периодической функции $f(z)$, причем

$$-1 < f(x) < 1 \quad \text{при} \quad x \in \boldsymbol{R}. \tag{20}$$

Далее, в силу (5), (6) и определения функции $\tilde{u}_n(x)$, имеем: $\operatorname{mes}\{x \in S^1 : \| v_n(x) \| > 2^{-n}\} < 2^{-n+1}$, так что последовательность функций $\psi_n(x) = \exp(2\pi i g_n(x))$ по лемме Бореля — Кантелли сходится почти всюду на S^1 к некоторой измеримой функции $\psi(x)$, $|\psi(x)| = 1$. Из равенств $g_n(x + \alpha) - g_n(x) = f_n(x) (n \in \boldsymbol{N})$ легко вывести равенство $\psi(x + \alpha) = \exp(2\pi i f(x)) \psi(x)$, или, полагая

$$\tau(x) = f(x) + 1, \tag{21}$$

равенство

$$\psi(x + \alpha) = \exp(2\pi i \tau(x)) \psi(x), \tag{22}$$

справедливое для почти всех $x \in S^1$. В силу (20) и (21) $\tau(x)$ — положительная аналитическая функция на S^1, а из (22) следует, что уравнение (4) при всяком целом λ имеет измеримое решение $\varphi(x) = \psi(x)^\lambda$.

5. Предположим теперь, что уравнение (4) с построенным $\tau(x)$ и некоторым вещественным λ обладает нетривиальным измеримым решением $\varphi(x)$. Покажем, что $\lambda \in \boldsymbol{Z}$. Способ доказательства близок к примененному в [5].

Для всякой функции $h: S^1 \to \boldsymbol{R}$ положим

$$S_k(h, x) = h(x) + h(x + \alpha) + \ldots + h(x + (k-1)\alpha).$$

Из равенства $\exp(2\pi i \lambda S_k(\tau, x)) = \varphi(x + k\alpha)/\varphi(x)$ и того, что в силу (18) $\| k_n \alpha \| < \delta_n < 1/n \to 0 \ (n \to \infty)$ вытекает: $\exp(2\pi i \lambda S_{k_n}(\tau, x)) \to 1$ по мере, откуда, используя (21), получаем: при $n \to \infty$

$$\lambda (S_{k_n}(f, x) + k_n) \to 0 \ (\operatorname{mod} 1) \text{ по мере.} \tag{23}$$

Зафиксируем $n \in \boldsymbol{N}$. Положим $r_n(x) = f(x) - f_n(x)$, так что $f(x) = f_{n-1}(x) + w_n(x) + r_n(x)$, и

$$S_{k_n}(f, x) = S_{k_n}(f_{n-1}, x) + S_{k_n}(w_n, x) + S_{k_n}(r_n, x) = $$
$$= X_n + Y_n + Z_n.$$

Из (9), (18) и (17) следует, что при всех x

$$|S_{k_n}(f, x) - Y_n| \leqslant |X_n| + |Z_n| \leqslant |g_{n-1}(x + k_n\alpha) - g_{n-1}(x)| +$$
$$+ k_n(|w_{n+1}(\cdot)|_0 + |w_{n+2}(\cdot)|_0 + \ldots) < 1/n + 2/(n+1). \quad (24)$$

Далее,

$$Y_n(x) = v_n(x + k_n\alpha) - v_n(x) = u_n(q_n x + q_n k_n\alpha) - u_n(q_n x). \quad (25)$$

Обозначим через $\Delta_{-1}^{(n)}$ $(n \geqslant 7)$ отрезок $[2^{-n} + n^{-1}, 3^{-1} - n^{-1}] \subset S^1$, а через $\Delta_0^{(n)}$ и $\Delta_1^{(n)}$ — его сдвиги ни 1/3 и 2/3 соответственно. Из (19), (5) и определения функции $\tilde{u}_n(x)$ вытекает:

$$|u_n(\xi + q_n k_n\alpha) - u_n(\xi) - j| < 2^{-n+1} \, (\xi \in \Delta_j^{(n)}; \; j = 0, \; \pm 1).$$

Полагая $\xi = q_n x$ и используя (25), получим: существуют три множества $B_j^{(n)} \subset S^1$, $\operatorname{mes} B_j^{(n)} = 3^{-1} - 2^{-n} - 2n^{-1}$ $(j = 0, \; \pm 1)$, такие, что при $x \in B_j^{(n)}$ $|Y_n(x) - j| < 2^{-n+1}$, откуда, учитывая (24), находим:

$$|S_{k_n}(f, x) - j| < \gamma_n \; (x \in B_j^{(n)}; \; j = 0, \; \pm 1),$$

где $\gamma_n = n^{-1} + 2(n+1)^{-1} + 2^{-n+1}$.

В частности, при $x \in B_0^{(n)}$ $|S_{k_n}(f, x)| < \gamma_n \to 0$ $(n \to \infty)$, и так как $\operatorname{mes} B_0^{(n)} \to 1/3$, то из (23) вытекает: $\lambda k_n \to 0 \pmod 1$. Заменяя $B_0^{(n)}$ множеством $B_1^{(n)}$, получим точно так же:

$$\lambda(1 + k_n) \to 0 \pmod 1.$$

Из последних двух соотношений следует, что при $n \to \infty$ $\lambda \to 0$ $(\mathrm{mod}\ 1)$, т. е. $\lambda \in \boldsymbol{Z}$. Теорема 1 доказана.

Изложенный метод и его модификации позволяют также построить ряд примеров, относящихся к функциональному уравнению

$$g(x + \alpha) - g(x) = f(x), \quad x \bmod 1, \quad (26)$$

и к каскаду $\{T^n\}$, порожденному метрическим автоморфизмом

$$T: (x, y) \to (x + \alpha, \; y + f(x)) \quad (27)$$

цилиндра $Ц = S^1 \times \boldsymbol{R}$. Обозначим через $C_0(S^1)$ (соответственно $A_0(S^1)$) множество всех непрерывных (соответственно аналитических) функций $f: S^1 \to \boldsymbol{R}$ с нулевым средним $\bar{f} = 0$, а через $A_+(\boldsymbol{T}^2)$ — множество всех положительных аналитических функций на $\boldsymbol{T}^2$.

Теорема 2. *Пусть $\alpha \in I$. Существует функция $f \in A_0(S^1)$, для которой уравнение* (26) *неразрешимо в измеримых g, однако каскад* (27) *неэргодичен.*

(Пример с $f \in C_0(S^1)$ построен в [2, 6]; в [3] поставлен вопрос, возможно ли то же при гладкой f. f берется из доказательства теоремы 1; инвариантное множество:

$$B = \{(x, y) \in Ц : \| y - \arg \psi(x)/2\pi \| < 1/10\}.$$

Неразрешимость уравнения (26) вытекает и [1]).

Тем не менее имеется простая связь между разрешимостью уравнения (26) и метрическими свойствами каскада (27).

Теорема 3. *Уравнение* (26) *имеет измеримое решение, если и только если каскод* (27) *обладает нетривиальным инвариантным измеримым множеством конечной меры.*

Пример, приведенный выше, а также пример [6] побуждают поставить следующий вопрос. Пусть уравнение (26) неразрешимо, однако каскад (27) неэргодичен; верно ли, что всякое инвариантное множество $B \subset Ц$ периодично по y?

Ответ на этот вопрос оказывается отрицательным. Более того, имеет место

Теорема 4. *Пусть $\alpha \in I$. Существует функция $f \in A_0(S^1)$, для которой уравнение* (26) *неразрешимо, однако у каскада* (27) *имеется инвариантное измеримое множество $B \subset Ц$, такое, что функция $m_B(\rho) = \operatorname{mes}\{(x, y) \in B : |y| \leqslant \rho\}$ есть $0(\rho)$ $(\rho \to \infty)$. Более того, f и B могут быть выбраны так, что $(0<) m_B(\rho) < \varphi(\rho)$, где $\varphi(\rho) > \mathrm{const} > 0$ — произвольная функция на $[0, \infty)$, стремящаяся к ∞ при $\rho \to \infty$. (Последнее необходимо в силу теоремы 3).*

Приведем теперь два простых признака эргодичности каскада (27), соответственно непрерывности спектра потока (1), близких к [5].

Пусть

$$f(x) = \sum f_m \exp(2\pi i m x) \; (f_{-m} = \bar{f}_m; \; f_0 = 0);$$

положим

$$g_m = f_m/(\exp(2\pi i m \alpha) - 1) \;\; (m \neq 0).$$

Теорема 5. *Если для некоторого бесконечного множества $P \subset \mathbf{N}$ выполнены условия*

$$\lim_{P \ni p \to \infty} \inf \left(\frac{\sum\limits_{m=1}^{p-1} m |g_m|}{p |g_p|} + \frac{\sum\limits_{m=p+1}^{\infty} |f_m|}{|f_p|} \right) = 0 \qquad (28)$$

и у $\| p\alpha \| < \mathrm{const} |f_p| < 1/p$ $(p \in P)$, то каскад (27) *эргодичен.*

Пусть задан поток (1). Положим $f(x) = \tau(x) - \bar{\tau}$, где функция $\tau(x)$ определена равенством (3), а $\bar{\tau}$ — ее среднее.

Теорема 6. *Если для некоторого бесконечного множества $P \subset \mathbf{N}$ выполнены условия* (28) *и $\inf\{|g_p| : p \in P\} > 0$, то спектр потока* (1) *непрерывен.*

С л е д с т в и е. При $r(\alpha) < 1$ (и только в этом случае) существует эргодический аналитический каскад (27), а также аналитический поток (1) с непрерывным спектром.

В связи с примером [2] в [3] высказано предположение, согласно которому непрерывность спектра потока (1) (с $F \in C(\boldsymbol{T}^2)$) эквивалентна эргодичности каскада (27) с $f(x) = \tau(x) - \bar{\tau}$. Следующая теорема показывает, что это не так даже для аналитических F.

Теорема 7. *Пусть* $\alpha \in I$. (*а*) *Существует функция* $F \in A_+(\boldsymbol{T}^2)$, *для которой спектр потока* (1) *непрерывен, однако каскад* (27) *неэргодичен.* (*б*) *Существует* $F \in A_+(\boldsymbol{T}^2)$ *такая, что каскад* (27) *эргодичен, однако спектр потока* (1) *содержит нетривиальную точечную компоненту.*

Список литературы: 1. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе.— Докл. АН СССР, 1953, № 93, с. 763—766. 2. *Крыгин А. Б.* Пример непрерывного потока на торе со смешанным спектром.— Мат. заметки, 1974, т. 15, № 2, с. 235—240. 3. *Аносов Д. В.* Об аддитивном функциональном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, № 37, с. 1259—1274. 4. *Рохлин В. А.* Избранные вопросы метрической теории динамических систем.— Усп. мат. наук, 1949, с. 57—128. 5. *Гордон А. Я.* Достаточное условие неразрешимости аддитивного функционального гомологического уравнения.— Функц. анализ, 1975, т. 9, № 4, с. 71—72. 6. *Крыгин А. Б.* Пример цилиндрического каскада с аномальными метрическими свойствами.— Вестн. МГУ. Сер. мат., 1975, № 5, с. 26—31.

Поступила 18 июля 1978 г.