УДК 513 838

В. Д. ГОЛОВИН

О ФУНКТОРАХ «EXT» ДЛЯ ПУЧКОВ И КОПУЧКОВ

Каждому пучку абелевых групп $\boldsymbol{F}$ на топологическом пространстве X можно сопоставить предкопучок $\boldsymbol{F}_c: U \to \Gamma_c(U; \boldsymbol{F})$ на произвольной полной подкатегории $\boldsymbol{B}$ категории всех открытых множеств в X. Для любых предкопучков абелевых групп F и G на категории $\boldsymbol{B}$ через $\operatorname{Hom}(\boldsymbol{B}; F, G)$ обозначим группу всех гомоморфизмов $F \to G$, а через $\operatorname{Ext}^k(\boldsymbol{B}; F, G)$ — правые производные функторы функтора $F \to \operatorname{Hom}(\boldsymbol{B}; F, G)$. В этой статье пространство X предполагается локально компактным, счетным в бесконечности, а в качестве категории $\boldsymbol{B}$ выбран базис топологии в X, состоящий из относительно компактных открытых множеств и обладающий следующим свойством: для любых двух множеств из $\boldsymbol{B}$ их пересечение также принадлежит $\boldsymbol{B}$. Доказано существование спектральной последовательности $E_2^{p,q} = \operatorname{Ext}^p(\boldsymbol{B}; \boldsymbol{F}_c, \boldsymbol{H}_c^q(\boldsymbol{G})) \Rightarrow \operatorname{Ext}^{p+q}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$, где $\boldsymbol{F}$ — тонкий пучок абелевых групп на X, $\boldsymbol{G}$ — произвольный пучок абелевых групп на X, $\boldsymbol{H}_c^q(\boldsymbol{G})$ — предкопучок $U \to H_c^q(U; \boldsymbol{G})$ на категории $\boldsymbol{B}$. С помощью этой спектральной последовательности доказана следующая теорема: если $\boldsymbol{O}$ — пучок ростков голоморфных функций в области G пространства $\boldsymbol{C}^n$, то для любого тонкого пучка модулей $\boldsymbol{F}$ над пучком колец $\boldsymbol{O}$ $\operatorname{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(G; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{O}) = 0$ при $k \neq n$.

1. Пусть X — локально компактное топологическое пространство, счетное в бесконечности. Рассмотрим множество всех открытых подмножеств в X как категорию, в которой множество $\operatorname{Hom}(U, U')$ состоит из одного элемента при $U \subset U'$ и пусто при $U \not\subset U'$. *Предкопучком* абелевых групп на категории всех открытых множеств в X называется ковариантный функтор из этой категории в категорию абелевых групп. Аналогично определяется предкопучок на произвольной полной подкатегории категории всех открытых множеств в X. Если, например, $\boldsymbol{F}$ — пучок абелевых групп на топологическом пространстве X, то соответствие $\boldsymbol{F}_c: U \to \Gamma_c(U; \boldsymbol{F})$ определяет предкопучок абелевых групп на категории всех открытых множеств в X.

Пусть $\boldsymbol{B}$ — базис топологии в X, состоящий из относительно компактных открытых множеств и обладающий следующим свойством: для любых двух множеств, принадлежащих $\boldsymbol{B}$, их пересечение также принадлежит $\boldsymbol{B}$. Пусть $\boldsymbol{U} = (U_i)$ — покрытие открытого множества U в X открытыми множествами, принадлежащими базису $\boldsymbol{B}$. Для произвольного предкопучка F на базисе $\boldsymbol{B}$ при каждом $k = 0, 1, \ldots$ положим $C_k^c(\boldsymbol{U}; F) = \coprod_{i_0 \ldots i_k} F(U_{i_0 \ldots i_k})$, где сумма берется по тем наборам индексов $i_0, \ldots, i_k$, для которых пересечение $U_{i_0\ldots i_k} = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k}$ не пусто. Определим оператор границы $\partial\colon C_k^c(\boldsymbol{U}; F) \to C_{k-1}^c(\boldsymbol{U}; F)$, положив для каждого $f = (f_{i_0\ldots i_k}) \in C_k^c(\boldsymbol{U}; F)$ $(\partial f)_{i_0\ldots i_{k-1}} = \sum\limits_j \sum\limits_{s=0}^{k} (-1)^s f_{i_0\ldots i_{s-1} j i_s \ldots i_{k-1}}$, где j принимает лишь те значения, при которых пересечение $U_j \cap \cap U_{i_0\ldots i_{k-1}}$ не пусто. Так как $\partial \cdot \partial = 0$, то получаем цепной комплекс $C_*^c(U; F)$, *группы гомологий* которого будем обозначать через $H_k^c(\boldsymbol{U}; F)$ (ср., например, [1], с. 217—218).

2. Обозначим через $\boldsymbol{B}\,|\,U$ базис открытых множеств в открытом множестве $U \subset X$, состоящий из тех множеств базиса $\boldsymbol{B}$, замыкания которых содержатся в U.

Лемма 1. *Пусть $\boldsymbol{F}$ — тонкий пучок абелевых групп на топологическом пространстве X. Тогда для любого открытого множества $U \subset X$ имеют место канонические изоморфизмы $H_k^c(\boldsymbol{B}\,|\,U; \boldsymbol{F}_c) = 0$ при $k \neq 0$; $H_0^c(\boldsymbol{B}\,|\,U; \boldsymbol{F}_c) = \Gamma_c(U; \boldsymbol{F})$.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{U} = (U_i)$ — локально конечное покрытие множества U открытыми множествами, принадлежащими базису $\boldsymbol{B}\,|\,U$. Пусть $f = (f_{i_0\ldots i_k}) \in C_k^c(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F}_c)$ — цикл размерности $k \geqslant 1$, т. е. $\partial f = 0$. По определению тонкого пучка ([2], с. 180) существует семейство гомоморфизмов $e_i\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$ с носителями $\operatorname{Supp} e_i \subset U_i$ и с суммой $\sum e_i$, являющейся тождественным изоморфизмом пучка $\boldsymbol{F}$ на себя. Положим $g = (g_{i_0\ldots i_{k+1}}) \in C_{k+1}^c(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F}_c)$, где $g_{i_0\ldots i_{k+1}} = e_{i_0} f_{i_1\ldots i_{k+1}}$. Тогда получим $(\partial g)_{i_0\ldots i_k} = \sum\limits_j e_j f_{i_0\ldots i_k} + \sum\limits_j \sum\limits_{s=1}^{k+1} (-1)^s e_{i_0} f_{i_1\ldots i_{s-1} j i_s \ldots i_k} = f_{i_0\ldots i_k}$, тем самым доказано, что $H_k^c(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F}_c) = 0$ при $k \neq 0$. Аналогично доказывается существование канонического изоморфизма $H_0^c(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F}_c) = \Gamma_c(U; \boldsymbol{F})$. Теперь заметим, что имеет место канонический изоморфизм цепных комплексов $C_k^c(\boldsymbol{B}\,|\,U; \boldsymbol{F}_c) = \varinjlim C_k^c(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F}_c)$, где индуктивный предел берется относительно упорядоченного, фильтрующегося по включению множества всех локально конечных покрытий $\boldsymbol{U}$ множества U открытыми множествами, принадлежащими базису $\boldsymbol{B}\,|\,U$. Отсюда получаем канонический изоморфизм для групп гомологий $H_k^c(\boldsymbol{B}\,|\,U; F_c) = \varinjlim H_k^c(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{F}_c)$. Лемма доказана.

3. Пусть U_0 — открытое множество в X и E_{U_0} — предкопучок на категории всех открытых множеств в X, для которого существует такая абелева группа G, что $E_{U_0}(U) = G$ при $U_0 \subset U$ и $E_{U_0}(U) = 0$ при $U_0 \not\subset U$. Предкопучок E_{U_0} будем называть *элементарным предкопучком* [3].

Лемма 2. *Для любых открытых множеств U_0 и U в X $H_k^c(\boldsymbol{B}\,|\,U; E_{U_0}) = 0$ при $k \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{B}|U=(U_i)$ и пусть $I=\{i:U_0\subset\subset U_i\}$. Тогда получаем $C_k^c(\boldsymbol{B}|U;\ E_{U_0})=\coprod_{i_0\ldots i_k} G_{i_0\ldots i_k}$, где $G_{i_0\ldots i_k}==G$, а суммирование производится по наборам $(i_0,\ldots,i_k)\in I^{k+1}$. Отсюда следует, что комплекс $C_*^c(\boldsymbol{B}|U;\ E_{U_0})$ ацикличен в размерностях $k\geqslant 1$ (ср. [2], с. 70). Лемма доказана.

4. Пусть F — предкопучок на базисе $\boldsymbol{B}$. При каждом $U\in\boldsymbol{B}$ определим элементарный предкопучок E_U, для которого $E_U(V)==F(U)$ при $U\not\subset V$ и $E_U(V)=0$ при $U\subset V$. Обозначим через F_0 предкопучок на категории всех открытых множеств, являющийся прямой суммой предкопучков $E_U\,(U\in\boldsymbol{B})$. На базисе $\boldsymbol{B}$ канонические гомоморфизмы $E_U\to F$ определяют гомоморфизм $F_0\to F$, являющийся, как непосредственно очевидно, эпиморфизмом предкопучков. Беря вместо F ядро эпиморфизма $F_0\to F$ и затем продолжая аналогичный процесс, получаем резольвенту предкопучка F на базисе $\boldsymbol{B}$ $\ldots\to F_1\to F_0\to F\to 0$, в которой предкопучки $F_0,\ F_1,\ \ldots$ являются прямыми суммами элементарных предкопучков. Будем называть эту резольвенту *канонической резольвентой* предкопучка F.

Лемма 3. *Пусть задана произвольная точная последовательность предкопучков* $\ldots\to F_1\to F_0\to F\to 0$ *на базисе* $\boldsymbol{B}$. *Тогда для любого открытого множества* $U\subset X$ *существует спектральная последовательность* $E^2_{p,q}=H_pH_q^c(\boldsymbol{B}|U;\ F_*)\Rightarrow H^c_{p+q}(\boldsymbol{B}|U;\ F)$.

Доказательство. Рассмотрим двойной комплекс, для которого $K_{p,q}=C_p^c(\boldsymbol{B}|U;\ F_q)$. Вычислим начальные члены обеих спектральных последовательностей этого двойного комплекса. Для первой спектральной последовательности $'E^1_{p,q}=0$ при $q\neq\neq 0$; $'E^1_{p,0}=C_p^c(\boldsymbol{B}|U;\ F)$. Следовательно, первая спектральная последовательность вырождается: $'E^2_{p,q}=0$ при $q\neq 0$; $'E^2_{p,0}==H_p^c(\boldsymbol{B}|U;\ F)$. Для второй спектральной последовательности $''E^1_{p,q}=H_q^c(\boldsymbol{B}|U;\ F_p)$; $''E^2_{p,q}=H_pH_q^c(\boldsymbol{B}|U;\ F_*)$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $\ldots\to F_1\to F_0\to F\to 0$ — *каноническая резольвента предкопучка* F *на базисе* $\boldsymbol{B}$. *Тогда для любого открытого множества* $U\subset X$ *имеет место канонический изоморфизм* $H_k^c(\boldsymbol{B}|U;\ F)=H_kH_0^c(\boldsymbol{B}|U;\ F_*)$.

Доказательство. Из леммы 2 получаем, что при сделанных предположениях спектральная последовательность леммы 3 вырождается. Отсюда следует утверждение.

5. Предкопучок P на базисе $\boldsymbol{B}$ называется *проективным*, если для произвольного эпиморфизма $F_0\to F$ каждый гомоморфизм $P\to F$ может быть разложен в композицию некоторого гомоморфизма $P\to F_0$ и эпиморфизма $F_0\to F$.

Лемма 4. *Если* P — *проективный предкопучок на базисе* $\boldsymbol{B}$, *то для любого открытого множества* $U\subset X$ $H_k^c(\boldsymbol{B}|U;P)=0$ *при* $k\neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность предкопучков $0\to R\to P_0\to P\to 0$ на базисе $\boldsymbol{B}$, в которой P_0 —

прямая сумма элементарных предкопучков, а R — ядро эпиморфизма $P_0 \to P$. Так как P — проективный предкопучок, то эта точная последовательность расщепляется. Следовательно, точна последовательность $0 \to H_k^c(\boldsymbol{B} \mid U;\ R) \to H_k^c(\boldsymbol{B} \mid U;\ P_0) \to H_k^c(\boldsymbol{B} \mid U;\ P) \to 0$. С другой стороны, по лемме 2 $H_k^c(\boldsymbol{B} \mid U;\ P_0) = 0$ при $k \neq 0$. Лемма доказана.

Пусть F — предкопучок на базисе $\boldsymbol{B}$. При каждом $U \in \boldsymbol{B}$ определим элементарный предкопучок E_U, для которого $E_U(V) = 0$ при $U \not\subset V$ и $E_U(V) = G$ при $U \subset V$, где G — свободная абелева группа, порожденная множеством $F(U)$. Обозначим через P_0 предкопучок на B, являющийся прямой суммой предкопучков $E_U (U \in \boldsymbol{B})$. Тогда P_0 является проективным предкопучком, и определен эпиморфизм предкопучков $P_0 \to F$ на базисе $\boldsymbol{B}$. Продолжая этот процесс, получаем проективную резольвенту предкопучка F: $\ldots \to P_1 \to P_0 \to F \to 0$ (ср. [3]). Из лемм 3 и 4 получаем, что для любого открытого множества $U \subset X$ имеет место канонический изоморфизм $H_k^c(\boldsymbol{B} \mid U;\ F) = H_k H_0^c(\boldsymbol{B} \mid U;\ P_*)$, т. е. функтор $F \to H_k^c(\boldsymbol{B} \mid U;\ F)$ является левым производным функтором функтора $F \to H_0^c(\boldsymbol{B} \mid U;\ F)$.

6. Пусть F — произвольный предкопучок абелевых групп на базисе $\boldsymbol{B}$. Для любого открытого множества $U \subset X$ положим $\check{F}(U) = H_0^c(\boldsymbol{B} \mid U;\ F)$. Получим предкопучок $\check{F}$ на категории всех открытых множеств в X. Если $U \in \boldsymbol{B}$, то определен канонический гомоморфизм абелевых групп $H_0^c(\boldsymbol{B} \mid U;\ F) \to F(U)$. Причем для $U \subset U'$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_0^c(\boldsymbol{B} \mid U;\ F) & \to & F(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_0^c(\boldsymbol{B} \mid U';\ F) & \to & F(U') \end{array}$$

Тем самым определен гомоморфизм предкопучков $\check{F} \to F$ на базисе $\boldsymbol{B}$. При этом, если $\boldsymbol{F}$ — тонкий пучок абелевых групп на X, а $F = \boldsymbol{F}_c$, то по лемме 1 $\check{F} = \boldsymbol{F}_c$, и гомоморфизм $\check{F} \to F$ является тождественным изоморфизмом предкопучка $\boldsymbol{F}_c$ на себя.

7. Пусть F — предкопучок абелевых групп на категории всех открытых множеств в пространстве X. Будем говорить, что предкопучок F регулярен, если для каждого открытого множества $U \subset X$ сюръективно каноническое отображение $\varinjlim F(V) \to F(U)$, где индуктивный предел берется относительно упорядоченного, фильтрующегося по включению множества всех относительно компактных открытых множеств $V \subset X$, замыкания которых содержатся в U.

Лемма 5. *Для любого предкопучка F на базисе $\boldsymbol{B}$ имеет место канонический изоморфизм $\varinjlim H_k^c(\boldsymbol{B} \mid V;\ F) = H_k^c(\boldsymbol{B} \mid U;\ F)$, где индуктивный предел берется относительно фильтрующегося множества всех относительно компактных открытых множеств $V \subset X$, замыкания которых содержатся в U.*

Доказательство. Так как $\boldsymbol{B}|U$ состоит из относительно компактных открытых множеств в X, замыкания которых содержатся в U, то имеет место канонический изоморфизм цепных комплексов $\varinjlim C_k^c(\boldsymbol{B}|V;\ F) = C_k^c(\boldsymbol{B}|U;\ F)$, где индуктивный предел берется относительно фильтрующегося множества всех относительно компактных открытых множеств $V \subset X$, замыкания которых содержатся в U. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Следствие. *Пусть F — произвольный предкопучок абелевых групп на базисе $\boldsymbol{B}$. Тогда предкопучок $\check{F}$ на категории всех открытых множеств в X регулярен.*

8. Пусть F — произвольный предкопучок абелевых групп на категории всех открытых множеств в X. Для произвольного компактного множества $M \subset X$ положим $G(M) = F(X)/F(X \setminus M)$. Так как при $M \subset M'$ гомоморфизм $F(X \setminus M') \to F(X \setminus M)$ индуцирует гомоморфизм $G(M') \to G(M)$, то $G: M \mapsto G(M)$ есть контравариантный функтор из категории всех компактных множеств пространства X в категорию абелевых групп. Иначе говоря, G — это предпучок абелевых групп на категории всех компактных множеств пространства X. Будем называть G *предпучком, ассоциированным с предкопучком* F. Таким образом, можно определить аддитивный ковариантный функтор $F \to G$ из категории предкопучков в категорию предпучков. Очевидно, что этот функтор точен.

Лемма 6. *Пусть $\boldsymbol{F}$ — мягкий пучок абелевых групп на топологическом пространстве X. Тогда для предпучка G, ассоциированного с предкопучком $F = \boldsymbol{F}_c$, имеет место канонический изоморфизм $G(M) = \Gamma(M;\ \boldsymbol{F})$, каково бы ни было компактное множество $M \subset X$.*

Доказательство. Так как $\boldsymbol{F}$ — мягкий пучок, то для любого компактного множества $M \subset X$ имеет место точная последовательность групп сечений $0 \to \Gamma_c(X \setminus M;\ \boldsymbol{F}) \to \Gamma_c(X;\ \boldsymbol{F}) \to \Gamma(M;\ \boldsymbol{F}) \to 0$. Отсюда утверждение леммы следует непосредственно.

9. Пусть F — предкопучок абелевых групп на категории всех открытых множеств в X. Пусть G — предпучок абелевых групп на категории всех компактных множеств в X, ассоциированный с предкопучком F. Обозначим через $\boldsymbol{G}$ пучок абелевых групп на X, порожденный предпучком G [2, с. 133]. Тогда для каждой точки $x \in X$ $\boldsymbol{G}_x = \varinjlim G(M)$, где индуктивный предел берется по фильтрующемуся множеству всех компактных окрестностей M точки x. По определению $\boldsymbol{G}$ есть объединение слоев $\boldsymbol{G}_x$ $(x \in X)$, в котором естественным образом введена топология [2, с. 131]. Будем называть $\boldsymbol{G}$ *пучком, ассоциированным с предкопучком* F. Из леммы 6 следует, что для мягкого пучка $\boldsymbol{F}$ пучок $\boldsymbol{G}$, ассоциированный с предкопучком $F = \boldsymbol{F}_c$, совпадает с $\boldsymbol{F}$.

Пусть, например, $F = \boldsymbol{A}'$ — предкопучок аналитических функционалов в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Иначе говоря, для каждого открытого множества $U \subset \boldsymbol{R}^n$ $F(U) = \boldsymbol{A}'(U)$ есть векторное пространство всех непрерывных линейных форм на топологическом векторном пространстве $\boldsymbol{A}(U)$ всех аналитических функций в U. Тогда пучок $\boldsymbol{G}$, ассоциированный с предкопучком F, совпадает с пучком $\boldsymbol{B}$ ростков гиперфункций на $\boldsymbol{R}^n$. Действительно, для каждого компактного множества $M \subset \boldsymbol{R}^n$ $G(M) = \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{R}^n)/\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{R}^n \setminus M)$. С другой стороны, для каждого относительно компактного открытого множества $U \subset \boldsymbol{R}^n$ $\boldsymbol{B}(U) = \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{R}^n)/\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{R}^n \setminus U)$ [4, с. 58]. Отсюда легко следует, что $\boldsymbol{G}_x = \boldsymbol{B}_x$ для каждой точки $x \in \boldsymbol{R}^n$.

10. Докажем следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть F — регулярный предкопучок на категории всех открытых множеств в пространстве X. Пусть $\boldsymbol{G}$ — пучок абелевых групп на X, ассоциированный с предкопучком F. Тогда существует канонический гомоморфизм $F \to \boldsymbol{G}_c$ предкопучков на категории всех открытых множеств в X. При этом, если $\boldsymbol{F}$ — мягкий пучок абелевых групп на X и $F = \boldsymbol{F}_c$, то $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$ и гомоморфизм $F \to \boldsymbol{G}_c$ является тождественным изоморфизмом предкопучка $\boldsymbol{F}_c$ на себя.*

Доказательство. Пусть U — произвольное открытое множество в X, и пусть f — произвольный элемент группы $F(U)$. Для произвольной точки $x \in U$ выберем компактную окрестность $M \subset U$, и обозначим через g_M элемент группы $G(M) = F(X)/F \times \times (X \setminus M)$, являющийся образом элемента f при сквозном отображении $F(U) \to F(X) \to G(M)$. Пусть g_x — элемент группы $\boldsymbol{G}_x = \varinjlim (G(M)$, являющийся образом элемента g_M при каноническом отображении $G(M) \to \boldsymbol{G}_x$. Очевидно, что элемент g_x не зависит от выбора окрестности M точки x. Очевидно также, что элементы $g_x (x \in U)$ образуют сечение $g: x \mapsto g_x$ пучка $\boldsymbol{G}$ над открытым множеством U. Так как F — регулярный предкопучок, то существует относительно компактное открытое множество $U_0 \subset X$ такое, что $\overline{U}_0 \subset U$ и элемент $f \in F(U)$ является образом некоторого элемента $f_0 \in F(U_0)$ при отображении $F(U_0) \to F(U)$. Пусть M — компактное множество, содержащееся в U, для которого $M \cap U_0 = \varnothing$. Тогда $U_0 \subset X \setminus M$ и, следовательно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(U_0) & \to & F(X \setminus M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(U) & \to & F(X) \end{array}$$

Из этой диаграммы непосредственно видно, что образ элемента f в $G(M)$ равен нулю: $g_M = 0$. Таким образом $g_x = 0$ при $x \notin \overline{U}_0$, т. е. сечение $g \in \Gamma(U; \boldsymbol{G})$ имеет компактный носитель, содержащийся в $\overline{U}_0$. Очевидно, что соответствие $f \mapsto g$ есть гомоморфизм абелевых групп $F(U) \to \Gamma_c(U; \boldsymbol{G})$, который определяет гомоморфизм предкопучков $F \to G_c$. Предложение доказано.

11. Пусть F и G — предкопучки абелевых групп на базисе $\boldsymbol{B}$. Будем обозначать через $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{B};\ F,\ G)$ абелеву группу всех гомоморфизмов $F \to G$.

Предложение 2. *Пусть $\boldsymbol{F}$ — мягкий пучок абелевых групп на топологическом пространстве X. Тогда для любого пучка абелевых групп $\boldsymbol{G}$ на X имеет место канонический изоморфизм* $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{F}_c,\ \boldsymbol{G}_c) = \mathrm{Hom}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{G})$.

Доказательство. Так как каждый гомоморфизм пучков абелевых групп $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ определяет очевидным образом гомоморфизм $\boldsymbol{F}_c \to \boldsymbol{G}_c$ предкопучков абелевых групп на базисе $\boldsymbol{B}$, то получаем канонический гомоморфизм абелевых групп $\mathrm{Hom}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{G}) \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{F}_c,\ \boldsymbol{G}_c)$. Так как $\boldsymbol{F}$ — мягкий пучок, то этот гомоморфизм является мономорфизмом. Осталось доказать, что он является эпиморфизмом. Пусть задан гомоморфизм $\boldsymbol{F}_c \to \boldsymbol{G}_c$ предкопучков абелевых групп на $\boldsymbol{B}$. Для произвольной точки $x \in X$ выберем открытое множество $U \in \boldsymbol{B}$, содержащее x. Тогда для каждого элемента $f_x \in \boldsymbol{F}_x$ существует сечение $f \in \Gamma_c(U;\ \boldsymbol{F})$, росток которого в точке x совпадает с f_x. Пусть g — образ элемента f при гомоморфизме $\Gamma_c(U;\ \boldsymbol{F}) \to \Gamma_c(U;\ \boldsymbol{G})$, определяемом гомоморфизмом $\boldsymbol{F}_c \to \boldsymbol{G}_c$. Обозначим через g_x росток сечения g в точке x. Покажем, что g_x не зависит от выбора открытого множества U и сечения f. Пусть $f \in \Gamma_c(U;\ \boldsymbol{F})$ — сечение над произвольной окрестностью $U \in \boldsymbol{B}$ точки $x \in X$, и пусть g — образ сечения f при гомоморфизме $\Gamma_c(U;\ \boldsymbol{F}) \to \Gamma_c(U;\ \boldsymbol{G})$. Достаточно доказать, что $g_x = 0$, если $f_x = 0$. Существует конечное покрытие носителя $\mathrm{Supp}\, f$ сечения $f \in \Gamma_c(U;\ \boldsymbol{F})$ открытыми множествами $U_i \in \boldsymbol{B}$, содержащимися в $U \setminus \{x\}$. Так как $\boldsymbol{F}$ — мягкий пучок, то существует разложение $f = \Sigma f_i$, где $f_i \in \Gamma_c(U_i;\ \boldsymbol{F})$ [2, с. 179]. Обозначим через g_i образ сечения f_i при гомоморфизме $\Gamma_c(U_i;\ \boldsymbol{F}) \to \Gamma_c(U_i;\ \boldsymbol{G})$. Тогда $g = \Sigma g_i$ и, следовательно, $g_x = 0$. Тем самым установлено, что соответствие $f_x \mapsto g_x$ определяет гомоморфизм $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ пучков абелевых групп. Предложение доказано.

12. Рассмотрим правые производные функторы $\mathrm{Ext}^k(\boldsymbol{B};\ F,\ G) = R^k\,\mathrm{Hom}(\boldsymbol{B};\ F,\ G)$ функтора $F \mapsto \mathrm{Hom}(\boldsymbol{B};\ F,\ G)$. Пусть задана проективная резольвента $\ldots \to P_1 \to P_0 \to F \to 0$ предкопучка абелевых групп F на базисе $\boldsymbol{B}$. Тогда по определению $\mathrm{Ext}^k(\boldsymbol{B};\ F,\ G) = H^k\,\mathrm{Hom}(\boldsymbol{B};\ P_*,\ G)$ [5, с. 42].

Точная последовательность предкопучков абелевых групп на базисе $\boldsymbol{B}$ $0 \to G \to F_{k-1} \to \ldots \to F_0 \to F \to 0$ называется *k-кратной точной последовательностью*, начинающейся предкопучком G и кончающейся предкопучком F. Отношение конгруэнтности между двумя k-кратными точными последовательностями, начинающимися предкопучком G и кончающимися предкопучком F,— это наименьшее рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение, вытекающее из существования морфизма точных последовательностей с тождественными изоморфизмами на концах, т. е. вытекающее из существования коммутативной диаграммы вида

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \to & G & \to & F_{k-1} & \to & \ldots & \to & F_0 & \to & F & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & G & \to & F'_{k-1} & \to & \ldots & \to & F'_0 & \to & F & \to & 0 \end{array}$$

(ср. [6, с. 115]). Пусть $E^k(F, G)$ — множество классов попарно конгруэнтных k-кратных точных последовательностей, начинающихся предкопучком G и кончающихся предкопучком F. Тогда в множестве $E^k(F, G)$ можно естественным образом определить сложение (так называемое «сложение Бэра»), относительно которого $E^k(F, G)$ является абелевой группой (ср. [6, с. 116]). Нулевым элементом в группе $E^1(F, G)$ является класс всех расщепляющихся точных последовательностей вида $0 \to G \to F_0 \to F \to 0$. Нулевым элементом в группе $E^k(F, G)$ при $k \geqslant 2$ является класс конгруэнтности k-кратной точной последовательности $0 \to G \xrightarrow{1} G \to \to 0 \to \ldots \to 0 \to F \xrightarrow{1} F \to 0$ (ср. [6, с. 118]). Имеет место канонический изоморфизм абелевых групп $E^k(F, G) = \mathrm{Ext}^k(\boldsymbol{B};\ F, G)$ (ср. [6, стр. 121]).

13. Имеет место следующее предложение.

Предложение 3. *Пусть $\boldsymbol{F}$ — тонкий пучок абелевых групп на топологическом пространстве X. Тогда для любого инъективного пучка абелевых групп G на X* $\mathrm{Ext}^k(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{F}_c, \boldsymbol{G}_c) = 0$ при $k \neq 0$.

Доказательство. Можно считать, что $\boldsymbol{G}$ — инъективный и тонкий пучок абелевых групп на X. Действительно, существует мономорфизм пучков абелевых групп $\boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}^0$, где $\boldsymbol{G}^0$ — инъективный и тонкий пучок абелевых групп на X. Так как пучок $\boldsymbol{G}$ инъективен, то точная последовательность $0 \to \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}^0 \to \to \boldsymbol{Q} \to 0$, где $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{G}^0/\boldsymbol{G}$, расщепляется. Тогда точная последовательность $0 \to \boldsymbol{G}_c \to \boldsymbol{G}_c^0 \to \boldsymbol{Q}_c \to 0$ также расщепляется. Отсюда получаем расщепляющуюся точную последовательность $0 \to \mathrm{Ext}^k \times \times (\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{F}_c, \boldsymbol{G}_c) \to \mathrm{Ext}^k(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{F}_c, \boldsymbol{G}_c^0) \to \mathrm{Ext}^k(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{F}_c, \boldsymbol{Q}_c) \to 0$. В частности, $\mathrm{Ext}^k(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{F}_c, \boldsymbol{G}_c) = 0$, если $\mathrm{Ext}^k(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{F}_c, \boldsymbol{G}_c^0) = 0$. Итак, пусть $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$ — тонкие пучки абелевых групп на X, причем пучок $\boldsymbol{G}$ инъективен. Рассмотрим сначала случай $k = 1$. Пусть дана точная последовательность $0 \to \boldsymbol{G}_c \to \boldsymbol{F}_0 \to \boldsymbol{F}_c \to 0$, где F_0 — предкопучок абелевых групп на базисе $\boldsymbol{B}$. Из леммы 1 и определения гомоморфизма $\check{F}_0 \to F_0$ следует, что на базисе $\boldsymbol{B}$ определена коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \boldsymbol{G}_c & \to & \check{F}_0 & \to & \boldsymbol{F}_c & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & \boldsymbol{G}_c & \to & F_0 & \to & \boldsymbol{F}_c & \to & 0 \end{array}$$

с точными строками. По малой лемме о пяти гомоморфизмах гомоморфизм $\check{F}_0 \to F_0$ на базисе $\boldsymbol{B}$ является изоморфизмом. Иначе говоря, предкопучок $\check{F}_0$ является продолжением предкопучка F_0

на категорию всех открытых множеств в X. Пусть $\boldsymbol{F}_0$ — пучок абелевых групп на X, ассоциированный с предкопучком $\check{F}_0$. Так как функтор, определяемый соответствием $\check{F}_0 \to \boldsymbol{F}_0$, точен, то ввиду леммы 6 получаем точную последовательность пучков $0 \to \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{F}_0 \to \boldsymbol{F} \to 0$. Эта последовательность расщепляется, так как $\boldsymbol{G}$ — инъективный пучок. Следовательно, точная последовательность $0 \to \boldsymbol{G}_c \to \boldsymbol{F}_{0c} \to \boldsymbol{F}_c \to 0$ также расщепляется. С другой стороны, по предложению 1 существует коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \boldsymbol{G}_c & \to & \check{F}_0 & \to & \boldsymbol{F}_c & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & \boldsymbol{G}_c & \to & \boldsymbol{F}_{0c} & \to & \boldsymbol{F}_c & \to & 0 \end{array}$$

Отсюда следует, что гомоморфизм предкопучков абелевых групп $\check{F}_0 \to \boldsymbol{F}_{0c}$ является изоморфизмом. Тогда $F_0 = F_{0c} | \boldsymbol{B}$ и, следовательно, точная последовательность $0 \to \boldsymbol{G}_c \to F_0 \to \boldsymbol{F}_c \to 0$ расщепляется. Тем самым доказано, что $\operatorname{Ext}^1(\boldsymbol{B}; \boldsymbol{F}_c, \boldsymbol{G}_c) = 0$. Рассмотрим теперь случай $k \geqslant 2$. Пусть дана k-кратная точная последовательность $0 \to \boldsymbol{G}_c \to F_{k-1} \to \ldots \to F_0 \to \boldsymbol{F}_c \to 0$, где $F_0, \ldots F_{k-1}$ — предкопучки абелевых групп на базисе $\boldsymbol{B}$. Можно считать, что $F_0, \ldots, F_{k-2}$ — проективные предкопучки абелевых групп на $\boldsymbol{B}$ (ср. [6, с. 122]). Из леммы 1 и определения гомоморфизмов $\check{F}_i \to F_i$ получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & \boldsymbol{G}_c & \to & \check{F}_{k-1} & \to \ldots \to & \check{F}_0 & \to & \boldsymbol{F}_c & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & \boldsymbol{G}_c & \to & F_{k-1} & \to \ldots \to & F_0 & \to & \boldsymbol{F}_c & \to & 0 \end{array}$$

Так как $\boldsymbol{F}$ — тонкий пучок, а $F_0, \ldots F_{k-2}$ — проективные предкопучки, то верхняя строка в этой диаграмме точна. Таким образом, строки являются конгруэнтными k-кратными точными последовательностями. Пусть $\boldsymbol{F}_0, \ldots \boldsymbol{F}_{k-1}$ — пучки абелевых групп на X, ассоциированные соответственно с предкопучками $\check{F}_0, \ldots \check{F}_{k-1}$. Тогда последовательность пучков $0 \to \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{F}_{k-1} \to \ldots \to \boldsymbol{F}_0 \to \boldsymbol{F} \to 0$ точна. Так как пучок $\boldsymbol{G}$ инъективен, то определена коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & \boldsymbol{G} & \to & \boldsymbol{F}_{k-1} & \to \ldots \to & \boldsymbol{F}_0 & \to & \boldsymbol{F} & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & \boldsymbol{G} & \xrightarrow{1} & \boldsymbol{G} & \to \ldots \to & \boldsymbol{F} & \xrightarrow{1} & \boldsymbol{F} & \to & 0, \end{array}$$

где нижняя строка тривиальна. Отсюда и из предложения 1 получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 \to & \boldsymbol{G}_c & \to & \check{\boldsymbol{F}}_{k-1} & \to \dots \to & \check{\boldsymbol{F}}_0 & \to & \boldsymbol{F}_c & \to 0 \\
 & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| & \\
0 \to & \boldsymbol{G}_c & \to & \boldsymbol{F}_{(k-1)c} & \to \dots \to & \boldsymbol{F}_{0c} & \to & \boldsymbol{F}_c & \to 0 \\
 & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| & \\
0 \to & \boldsymbol{G}_c & \to & \boldsymbol{G}_c & \to \dots \to & \boldsymbol{F}_c & \to & \boldsymbol{F}_c & \to 0,
\end{array}$$

в которой первая и третья строки точны. Следовательно, первая и третья строки конгруэнтны, а так как третья строка тривиальна, то $\mathrm{Ext}^k(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{F}_c,\ \boldsymbol{G}_c) = 0$. Предложение доказано.

14. Основным результатом этой статьи является следующая

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{F}$ — тонкий пучок абелевых групп на топологическом пространстве X. Тогда для любого пучка абелевых групп $\boldsymbol{G}$ на X существует спектральная последовательность* $E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{F}_c,\ \boldsymbol{H}_c^q(\boldsymbol{G})) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{G})$, где $\boldsymbol{H}_c^q(\boldsymbol{G})$ — *предкопучок* $U \to H_c^q(U;\ \boldsymbol{G})$ *на категории всех открытых множеств в* X.

Доказательство. Выберем какую-нибудь проективную резольвенту $\dots \to P_1 \to P_0 \to \boldsymbol{F}_c \to 0$ предкопучка $\boldsymbol{F}_c$ в категории предкопучков абелевых групп, и какую-нибудь инъективную резольвенту $0 \to \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{L}^0 \to \boldsymbol{L}^1 \to \dots$ пучка $\boldsymbol{G}$ в категории пучков абелевых групп. Рассмотрим двойной комплекс $K^{p,q} = \mathrm{Hom}(\boldsymbol{B};\ P_p,\ \boldsymbol{L}_c^q)$. Для первой спектральной последовательности этого комплекса $'E_1^{p,q} = \mathrm{Hom}(\boldsymbol{B};\ P_p,\ \boldsymbol{H}_c^q(\boldsymbol{G}))$; $'E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{F}_c,\ \boldsymbol{H}_c^q(\boldsymbol{G}))$. По предложению 3 для второй спектральной последовательности $''E_1^{p,q} = \mathrm{Ext}^q(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{F}_c,\ \boldsymbol{L}_c^p) = 0$ при $q \neq 0$. По предложению 2 получаем изоморфизм $''E_1^{p,0} = \mathrm{Hom}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{L}^p)$. Следовательно, вторая спектральная последовательность вырождается: $''E_2^{p,q} = 0$ при $q \neq 0$; $''E_2^{p,0} = \mathrm{Ext}^p(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{G})$. Теорема доказана.

Следствие. *Для любых тонких пучков абелевых групп $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$ на топологическом пространстве X имеет место канонический изоморфизм* $\mathrm{Ext}^k(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{F}_c,\ \boldsymbol{G}_c) = \mathrm{Ext}^k(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{G})$.

Доказательство. Так как $\boldsymbol{G}$ — тонкий пучок, то $\boldsymbol{H}_c^q(\boldsymbol{G}) = 0$ при $q \neq 0$. Значит, в этом случае спектральная последовательность теоремы 1 вырождается. Отсюда следует утверждение.

15. Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующая

Лемма 7. *Пусть $\boldsymbol{O}$ — пучок коммутативных колец с единицей на топологическом пространстве X. Тогда для любых $\boldsymbol{O}$-модулей $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$ имеет место канонический изоморфизм* $\mathrm{Ext}_{\boldsymbol{O}}^k(X;\ \boldsymbol{F} \otimes_Z \boldsymbol{O},\ \boldsymbol{G}) = \mathrm{Ext}^k(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{G})$.

Доказательство. Воспользуемся каноническим изоморфизмом $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X;\ \boldsymbol{F} \otimes_Z \boldsymbol{O},\ \boldsymbol{G}) = \mathrm{Hom}(X;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{G})$. Пусть выбрана произвольная инъективная резольвента пучка G $0 \to \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{L}^0 \to \boldsymbol{L}^1 \to \dots$ в категории $\boldsymbol{O}$-модулей. Она же является инъективной резольвентой пучка $\boldsymbol{G}$ в категории пучков абелевых групп. Отсюда утверждение следует непосредственно.

Теорема 2. *Пусть $\boldsymbol{O}$ — пучок ростков голоморфных функций в области $\boldsymbol{G}$ пространства $\boldsymbol{C}^n$. Тогда для любого тонкого пучка* *модулей* $\boldsymbol{F}$ *над пучком колец* $\boldsymbol{O}$ *в области* G $\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(G;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{O})=0$ *при* $k \neq n$.

Доказательство. Так как $\mathrm{inj}\cdot\dim \boldsymbol{O}=n$ [7, 8], то достаточно сказать, что $\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(G;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{O})=0$ при $k<n$. Сначала докажем, что $\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(G;\ \boldsymbol{F}\otimes_Z \boldsymbol{O},\ \boldsymbol{O})=0$ при $k<n$. По лемме 7 имеет место изоморфизм $\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(G;\ \boldsymbol{F}\otimes_Z \boldsymbol{O},\ \boldsymbol{O})=\mathrm{Ext}^k(G;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{O})$. Пусть $\boldsymbol{B}$ — базис открытых множеств в G, состоящий из голоморфно полных, относительно компактных, открытых множеств. По теореме 1 существует спектральная последовательность $E_2^{p,q}=\mathrm{Ext}^p\left(\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{F}_c,\ \boldsymbol{H}^q_c(\boldsymbol{O})\right)\Rightarrow$ $\Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(G;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{O})$, где $\boldsymbol{H}^q_c(\boldsymbol{O})$ — предкопучок $U\mapsto H^q_c(U;\ \boldsymbol{O})$ на $\boldsymbol{B}$. По теореме Картана-Шварца $\boldsymbol{H}^q_c(\boldsymbol{O})=0$ при $q\neq n$ [9, с. 368], поэтому спектральная последовательность вырождается. Отсюда получаем наше утверждение. Докажем утверждение теоремы с помощью индукции по k. При $k=0$ утверждение верно, так как $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(G;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{O})=0$ для тонкого пучка $\boldsymbol{F}$. Предположим, что утверждение теоремы верно для некоторого $k<n-1$. Воспользуемся точной последовательностью $0\to \boldsymbol{R}\to \boldsymbol{F}\otimes_Z \boldsymbol{O}\to \boldsymbol{F}\to 0$, где $\boldsymbol{R}$ — ядро канонического гомоморфизма $\boldsymbol{F}\otimes_Z \boldsymbol{O}\to \boldsymbol{F}$. Получаем точную последовательность для функтора Ext: $\ldots\to \mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(G;\ \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{O})\to \mathrm{Ext}^{k+1}_{\boldsymbol{O}}(G;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{O})\to \mathrm{Ext}^{k+1}_{\boldsymbol{O}}(G;\ \boldsymbol{F}\otimes_Z \boldsymbol{O},\ \boldsymbol{O})\to\ldots$. Так как $\boldsymbol{R}$ является, очевидно, тонким пучком, то по предположению индукции $\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(G;\ \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{O})=0$. Отсюда и из доказанного в самом начале утверждения $\mathrm{Ext}^{k+1}_{\boldsymbol{O}}(G;\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{O})=0$. Теорема полностью доказана.

Список литературы: 1. *Телеман К.* Элементы топологии и дифференцируемые многообразия. М., Мир, 1967. 390 с. 2. *Годеман Р.* Алгебраическая топология и теория пучков. М., Изд-во иностр. лит., 1961. 320 с. 3. *Deheuvels R.* Homologie des ensembles ordonnés et des espaces topologiques.— Bulletin de la Société mathématigue de France. 1962, vol. 90, N 2, p. 261—321. 4. *Шапира П.* Теория гиперфункций. М., Мир, 1972. 142 с. 5. *Гротендик А.* О некоторых вопросах гомологической алгебры. М., Изд-во иностр. лит., 1961. 176 с. 6. *Маклейн С.* Гомология. М., Мир, 1966. 544 с. 7. *Головин В. Д.* Критерии инъективности аналитических пучков.— Мат. заметки, т. 18, вып. 4, 1975, с. 589—596. 8. *Головин В. Д.* О глобальной размерности пучка ростков голоморфных функций. — Доклады АН СССР, 1975, т. 223, № 2, с. 273—275. 9. Расслоенные пространства и их приложения. Сборник переводов. М., Изд-во иностр. лит., 1958. 460 с.

Поступила 2 декабря 1975 г.