УДК 519.21 А. М. УЛАНОВСКИЙ

К ВОПРОСУ О БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ

Безгранично делимое (б. д.) распределение P допускает безгранично делимую факторизацию (б. д. ф.), если справедливо представление $P = P_+ \ast P_-$, где P_+ и P_- — б. д. распределения, сосредоточенные соответственно на $[0, +\infty)$ и $(-\infty, 0]$. Критерий б. д. ф. в терминах характеристической функции (х. ф.) $\varphi(t; P)$ распределения P получен И. В. Островским в работе [1, теорема 1]:

Для того, чтобы б. д. распределение допускало б. д. ф., необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|1/\varphi(t; P)|}{1+t^2}\, dt < \infty. \tag{1}$$

В работе [1] изучаются также вопросы б. д. ф. распределений с х. ф. вида $\varphi(t; P) = \gamma(-\psi(t))$ (2), где $\gamma(s)$ — преобразование Лапласа б. д. распределения, сосредоточенного на $[0, +\infty)$, $\psi(t)$ — логарифм х. ф. б. д. распределения. В силу теоремы Феллера [2, с. 646], распределения с х. ф. (2) являются б. д. Как известно [2, с. 647], функция $\gamma(s)$ допускает единственное представление $\gamma(s) = \exp\left\{\int\limits_{(0,\ \infty]} \frac{1}{x}(e^{-sx}-1)\, U(dx)\right\}$ (3), где $U(dx)$ — мера на $[0, +\infty)$, удовлетворяющая условию $\int\limits_{[0,\ \infty)} \frac{U(dx)}{1+x} < \infty$.

Для функции $\psi(t)$ имеет место формула Леви—Хинчина

$$\psi(t) = \psi_{\beta, G}(t) = i\beta t + \int\limits_{(-\infty,\ \infty)} \left(e^{ity} - 1 - \frac{ity}{1+y^2}\right) \frac{1+y^2}{y^2}\, G(dy), \tag{4}$$

где β — вещественная постоянная; $G(dy)$ — конечная мера.

Для б. д. распределений с х. ф. (2) была доказана такая теорема [1, теорема 2]:

а) Пусть $\gamma(s)$ фиксированно. Для того, чтобы при любой $\psi(t)$ распределение с х. ф. (2) допускало б. д. ф. необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{[0,1]} \frac{U(dx)}{\sqrt{x}} < \infty. \qquad (5)$$

б) Пусть $\psi(t)$ фиксированно. Для того, чтобы при любой $\gamma(s)$ распределение с х. ф. (2) допускало б. д. ф., необходимо и достаточно, чтобы распределение с х. ф. $\exp\psi(t)$ допускало б. д. ф.

Цель статьи — доказать следующую теорему, дающую критерий б. д. ф. распределения с х. ф. (2) в терминах мер $U(dx)$ и $G(dy)$ (чтобы исключить тривиальный случай, предположим, что $U(dx) \not\equiv 0$ и $G(dy) \not\equiv 0$).

Теорема 1. *Для того чтобы б. д. распределение с х. ф.* (2) *допускало б. д. ф., необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{[0,1]} \frac{v(x)}{x} U(dx) < \infty, \qquad (6)$$

где $U(dx)$ *— мера из представления* (3), *а положительная непрерывная функция* $v(x)$ *определяется как решение уравнения*

$$\frac{1}{v}\int_v^A \frac{G([-y,\ y])}{y^2}\, dy = \frac{1}{x}, \qquad (7)$$

где $G(dy)$ *— мера из представления* (4), $G([-A,\ A]) > 0$.

Левая часть уравнения (7) как функция от v монотонно убывает на $[0,\ A]$ от бесконечности к нулю, следовательно, положительное решение уравнения (7) существует, единственно и монотонно возрастает, причем $v(x) \to 0$, $(x \to +0)$ и существует предел $\lim\limits_{x\to+0} x^{-1}v(x) \leqslant +\infty$. Мы считаем подынтегральную функцию в (6) в точке 0 равной этому пределу. Сделав в (6) замену переменных $x = x(v)$, нетрудно убедиться, что теорема 1 может быть сформулирована так:

Для того, чтобы б. д. распределение с х. ф. (2) допускало б. д. ф., необходимо и достаточно, чтобы $\int_{[0,1]} I(v)\, V(dv) < \infty$, где

$$x(v) = v/I(v);\ \ V([0,\ v]) = U([0,\ x(v)]),$$

$$I(v) = \int_v^A \frac{G([-y,\ y])}{y^2}\, dy. \qquad (8)$$

Заметим, что решение $v(x)$ уравнения (7) удовлетворяет неравенствам $c_1\sqrt{x}\geqslant v(x)\geqslant c_2x$ **(9)**, где c_1 и c_2 — положительные постоянные. Действительно

$$\int\limits_{v(x)}^{A}\frac{G([-y,\ y])}{y^2}\,dy\leqslant G([-A,\ A])\left(\frac{1}{v(x)}-\frac{1}{A}\right)\leqslant\frac{c_1^2}{v(x)},$$

откуда в силу (7) получается левое неравенство в (9). Справедливость правого неравенства в (9) вытекает из (7) и того, что при $0<x<1$ выполняется $v(x)<v(1)<A$, так что

$$\int\limits_{v(x)}^{A}\frac{G([-y,\ y])}{y^2}\,dy\geqslant\int\limits_{v(1)}^{A}\frac{G([-y,\ y])}{y^2}\,dy=c_2.$$

Легко видеть, что если в уравнении (7) число A заменить другим числом $\tilde{A}$, для которого $G([-\tilde{A},\ \tilde{A}])>0$ и обозначить решение нового уравнения через $\tilde{v}(x)$, то[1] $v(x)\asymp\tilde{v}(x)\ (x\to+0)$. Действительно, пусть для определенности $A>\tilde{A}$. Тогда

$$\frac{1}{v(x)}\int\limits_{v(x)}^{\tilde{A}}\frac{G([-y,\ y])}{y^2}\,dy\leqslant\frac{1}{x},$$

поэтому в силу монотонности по v левой части уравнения [7], $v(x)\geqslant\tilde{v}(x)$. С другой стороны, при достаточно малых $x>0$, например, таких: $v(x)<\tilde{A}/2\int\limits_{v(x)}^{A}\frac{G([-y,\ y])}{y^2}\,dy\leqslant\frac{1+c}{v(x)}\int\limits_{v(x)}^{\tilde{A}}\frac{G([-y,\ y])}{y^2}\times$ $\times\,dy\leqslant\frac{1+c}{v(x)}\int\limits_{\frac{v(x)}{1+c}}^{\tilde{A}}\frac{G([-y,\ y])}{y^2}$ (здесь и ниже через c обозначаются положительные постоянные), откуда $v(x)\leqslant(1+c)\tilde{v}(x)$.

В дальнейшем будем предполагать, что в (7) $A=1$, т. е. $G([-1,\ 1])>0$. Этого всегда можно добиться, положив $\hat{G}(dy)=G(Ady)$. Очевидно, что б. д. распределения с х. ф. $\gamma(-\psi_{\beta,\,G}(t))$ и $\gamma(-\nu_{\beta,\,\hat{G}}((t))$ либо оба допускают б. д. ф., либо оба нет.

Покажем, что из нашей теоремы вытекает сформулированная выше теорема 2 работы [1]. Рассмотрим сначала п. а). Если выполнено (5), то в силу левой части неравенства (9) будет выпол-

[1] Запись $f(x)\asymp g(x)$ при $x\to+0$ ($f(x)\asymp g(x)$ при $x\in E$) означает, что существуют положительные константы c_1, c_2 такие, что для любого достаточно малого $x>0$ (для любого $x\in E$) выполняется неравенство $c_1g(x)\leqslant f(x)\leqslant c_2g(x)$.

няться (6). Наоборот, пусть **(6)** выполняется для решения уравнения (7) с любой мерой $G(dy)$. Поскольку при $G(dy)=\varepsilon(dy)$ (мера Дирака, сосредоточенная в точке нуль) имеем $v(x)\asymp\sqrt{x}\,(x\to+0)$, то справедливо (5). Теперь обратимся к п. б.). Как известно [I, формула (5)], б. д. распределение с х. ф. $\exp\psi(t)$ допускает б. д. ф. в том и только том случае, когда

$$\int\limits_{[-1,\,1]}\frac{G(dy)}{|y|}<\infty. \tag{10}$$

Покажем сначала, что (10) эквивалентно условию

$$v(x)\asymp x\,(x\to+0). \tag{11}$$

Пусть выполнено (11). При любом $0<x<1$ имеем

$$\int\limits_{1\geqslant|y|\geqslant v(x)}\frac{G(dy)}{|y|}=\frac{G([-y,\,y])}{y}\Bigg|_{v(x)}^{1}+\int\limits_{v(x)}^{1}\frac{G([-y,\,y])}{y^2}dy\leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_{v(x)}^{1}\frac{G([-y,\,y])}{y^2}\,dy.$$

Так как правая часть полученного неравенства в силу (11) и (7) ограничена (следовательно, $G(\{0\})=0$) и $v(x)\to 0$ $(x\to+0)$, то верно (10). С другой стороны, пусть выполнено (10). Поскольку

$$\int\limits_{[-1,1]}\frac{G(dy)}{|y|}=\left(\int\limits_{|y|<v(x)}+\int\limits_{1\geqslant|y|>v(x)}\right)\left(\frac{G(dy)}{|y|}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{G([-v(x),\,v(x)])}{v(x)}+\frac{G([-y,\,y])}{y}\Bigg|_{v(x)}^{1}+\int\limits_{v(x)}^{1}\frac{G([-y,\,y])}{y^2}dy\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{v(x)}^{1}\frac{G([-y,\,y])}{y^2}\,dy=\frac{v(x)}{x},$$

то учитывая (9), получаем (11). Пусть распределение с х. ф. $\exp\psi(t)$ допускает б. д. ф. Тогда имеет место (11), а из (11), очевидно, следует (6). Наоборот, так как при $U(dx)=\varepsilon(dx)$ из (6) имеем $\lim\limits_{x\to+0}x^{-1}v(x)<\infty$, то, учитывая (9), получаем (11),

Из теоремы 1 вытекает следующая

Теорема 2. *Пусть мера $U(dx)$ имеет плотность $p(x)$ при $0<x<\delta$. Для того, чтобы б. д. распределение с х. ф. (2) допускало б. д. ф., необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_{0}^{\varepsilon}p(v/I(v))\,dv<\infty, \tag{12}$$

где $I(v)$ определено равенством (8), а $\varepsilon>0$ таково, что $\varepsilon/I(\varepsilon)<\delta$.

Доказательство теоремы 2. Очевидно, функция $x(v)$, определяемая уравнением (7), абсолютно непрерывна при $v>0$. Причем, так как при $0<v<1/2$

$$I(v)=\int\limits_{1\geqslant|y|\geqslant v}\frac{G(dy)}{|y|}+\frac{G([-v,\ v])}{v}-G([-1,\ 1])\geqslant\int\limits_{1\geqslant|y|\geqslant 2v}G(dy)+$$
$$+\frac{1}{2v}\int\limits_{2v>|y|\geqslant v}G(dy)+\frac{G([-v,\ v])}{v}-G([-1,1])\geqslant\frac{G([-v,\ v])}{2v},$$

то почти для всех $0<v<1/2$

$$x'(v)=\frac{1}{I(v)}\left[1+\frac{G([-v,\ v])}{v\,I(v)}\right]\asymp\frac{1}{I(v)}.$$

Поэтому равенство

$$\int\limits_{[0,\ x(\varepsilon)]}\frac{v(x)}{x}U(dx)=\int\limits_0^{\varepsilon}I(v)\,x'(v)\,p(v/I(v))\,dv$$

доказывает равносильность условий (6) и (12).

Отметим некоторые следствия из теорем 1 и 2.

В работе [3] О. Торин назвал обобщенными Г-свертками б. д. распределения, преобразование Лапласа которых имеет вид $\gamma(s)=$ $=\exp\left\{as+\int\ln\left(\frac{x}{x+s}\right)W(dx)\right\}$ (13), где $a\geqslant 0$, а $W(dx)$ — мера удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{[0,\ \infty]}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)W(dx)<\infty,$$

Следствие 1. *Пусть* $\gamma(s)$ *является преобразованием Лапласа обобщенной* Г-*свертки, Для того, чтобы распределение с х. ф.* (2) *допускало б. д. ф., необходимо и достаточно, чтобы при* $a=0$ *выполнялось условие*

$$\int\limits_0^1\int\limits_{[0,\ \infty)}e^{-x\frac{v}{I(v)}}W(dx)\,dv<\infty,$$

а при $a>0$ *выполнялось условие* (10).

Доказательство. Исходя из формулы

$$\ln\frac{x}{x+s}=\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-xy}}{y}(e^{-sy}-1)\,dy,$$

нетрудно получить, что мера $U(dx)$, отвечающая обобщенной Г-свертке (13) по формуле (3), обладает плотностью $p(x)=$ $=\int\limits_{[0,\ \infty)}e^{-xy}W(dy)$, $x>0$ и имеет массу a в точке нуль. Пусть

$a > 0$. Тогда из теоремы 1 вытекает, что распределение с х. ф. (2) допускает б. д. ф. в том и только том случае, когда $\lim_{x\to+0} x^{-1}v(x) < \infty$. Используя (9), убедимся, что последнее неравенство равносильно условию (11), а следовательно, и (10). Справедливость следствия 1 при $a = 0$ вытекает из теоремы 2 и явного вида плотности $p(x)$.

Следствие 2. *Пусть $\gamma(s)$ — преобразование Лапласа устойчивого распределения на $[0, +\infty)$ с показателем $0 < \alpha < 1$. Для того, чтобы распределение с х. ф. (2) допускало б. д. ф., необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{v}\int_v^1 \frac{G([-y, y])}{y^2}\, dy\right]^\alpha dv < \infty.$$

Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 2 и явного вида меры $U(dx)$ ([2, с. 650—651])

$$U(dx) = c\frac{dx}{x^\alpha}, \quad x > 0.$$

Следствие 3. *Пусть мера $G(dy)$ удовлетворяет условиям* $G([0, y]) \asymp y^r \ (y \to +0)$; $G[-y, 0]) \asymp y^s \ (y \to +0)$, **(14)** где $0 < r$, $s \leqslant 1$. Распределение с х. ф. (2) допускает б. д. ф. тогда и только тогда, когда $\int_{[0,1]} x^{\frac{m-1}{2-m}} U(dx) < \infty \ (m = \min(r, s) < 1)$; $\int_{[0,1]} \ln\frac{1}{x} \times$ $\times\, U(dx) < \infty \ (r = s = 1)$.

Доказательство. Учитывая оценки (14) для меры $G(dy)$ из уравнения (7) легко получить, что $v(x) \asymp x^{\frac{1}{2-m}}$, если $m < 1$; $v(x) \asymp x\ln(1/x)$, если $r = s = 1$. Для доказательства следствия 3 остается применить теорему 1.

Заметим, что условия (14) выполняются, если $G(dy)$ — мера, отвечающая устойчивому распределению с показателем $\alpha = 2 - r = 2 - s$. Таким образом, верно

Следствие 4. *Пусть $\psi(t)$ логарифм х. ф. устойчивого распределения с показателем $1 \leqslant \alpha < 2$. Распределение с х. ф. (2) допускает б. д. ф. в том и только том случае, когда*

$$\int_{[0,1]} x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} U(dx) < \infty \ (\alpha > 1); \quad \int_{[0,1]} \ln\frac{1}{x}\, U(dx) < \infty \ (\alpha = 1).$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, установим справедливость следующей леммы.

Лемма. Определим положительную непрерывную функцию $z(x)$ как решение уравнения

$$z^2(x) \int\limits_{[-1,1]} \frac{G(dy)}{1+|y|\,z(x)} = \frac{1}{x}, \tag{7'}$$

где $G(dy)$ — мера, фигурирующая в (4). Тогда

$$z(x) \asymp \frac{1}{v(x)} \quad (x \to +0), \tag{15}$$

где v — решение уравнения (7).

Доказательство. При любом фиксированном y дробь $z^2/(1+|y|z)$ как функция от z монотонно возрастает на $[0, \infty)$ от нуля к бесконечности, следовательно, существует единственное положительное решение уравнения (7'). Учитывая, что $1+|y|z \geqslant 1$ $(|y| \leqslant 1/z)$, $1+|y|z \geqslant |y|z$ $(1 \geqslant |y| > 1/z)$ и интегрируя по частям, получаем

$$z^2(x) \int\limits_{[-1,1]} \frac{G(dy)}{1+|y|\,z(x)} \leqslant z^2(x)\, G\left(\left[-\frac{1}{z(x)},\ \frac{1}{z(x)}\right]\right) +$$

$$+z(x) \int\limits_{1 \geqslant |y| \geqslant \frac{1}{z(x)}} \frac{G(dy)}{|y|} = z(x)\, G([-1,\ 1]) + z(x) \int\limits_{\frac{1}{z(x)}}^{1} \frac{G([-y,\ y])}{y^2}\, dy \leqslant$$

$$\leqslant (1+c)\, z(x) \int\limits_{\frac{1}{(1+c)\,z(x)}}^{1} \frac{G([-y,\ y])}{y^2}\, dy,$$

отсюда $1/v(x) \leqslant (1+c)\,z(x)$. Использовав неравенства $1+|y|z \leqslant 2$ $(|y| \leqslant 1/z)$, $1+|y|z \leqslant 2|y|z$ $(1 \geqslant |y| > 1/z)$ и проделав выкладку, подобную предыдущей, получим $1/v(x) \geqslant z(x)/2$.

Доказательство теоремы 1. В силу (15) достаточно доказать, что б. д. распределение с х. ф. (2) допускает б. д. ф, в том и только том случае, когда

$$\int\limits_{[0,\,1]} \frac{U(dx)}{x z(x)} < \infty, \tag{6'}$$

где $z(x)$ — решение уравнения (7').

Рассмотрим отдельно три случая

1) $G([-y,\ 0) \cup (0,\ y]) > 0\ (\forall y > 0)$; (16)

2) $G(\{0\}) > 0$; (17)

3) $G([-y,\ y]) = 0\ [\exists y > 0)$. (18)

1) В работе [1, формула (12)] показано, что распределение с х. ф. (2) допускает б. д. ф. тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{[0,\,1]} \frac{h_\psi(x)}{x}\, U(dx) < \infty, \tag{19}$$

где

$$h_\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{Re}\exp(x\psi(t))}{1+t^2}\,dt. \tag{20}$$

Докажем справедливость оценки $h_\psi(x) \asymp \frac{1}{z(x)} \; (x \to +0)$, **(21)**

из которой вытекает равносильность условий (6′) и (19). Оценим сверху функцию $h_\psi(x)$. Замечая, что $\operatorname{Re}\psi(t) \leqslant 0$ и что $1 - \operatorname{Re} e^w =$
$= 1 - e^{\operatorname{Re} w} + e^{\operatorname{Re} w}(1 - \cos \operatorname{Im} w) \leqslant |\operatorname{Re} w| + \frac{1}{2}(\operatorname{Im} w)^2 \; (\operatorname{Re} w \leqslant 0)$,

получаем

$$\begin{aligned} h_\psi(x) &= \left(\int_{|t|<z(x)} + \int_{|t|\geqslant z(x)}\right)\left(\frac{1 - \operatorname{Re}\exp(x\psi(t))}{1+t^2}\,dt\right) \leqslant \\ &\leqslant x \int_{|t|<z(x)} \frac{|\operatorname{Re}\psi(t)|}{1+t^2}\,dt + \frac{x^2}{2}\int_{|t|<z(x)} \frac{(\operatorname{Im}\psi(t))^2}{1+t^2}\,dt + \\ &\quad + 2\int_{|t|>z(x)} \frac{dt}{t^2} = J_1(x) + J_2(x) + \frac{4}{z(x)}. \end{aligned} \tag{22}$$

Оценим функцию $J_1(x)$. Используя (4) и изменяя порядок интегрирования (что возможно в силу неотрицательности подынтегральной функции), имеем

$$\begin{aligned} J_1(x) &= x \int_{(-\infty,\,\infty)} \frac{1+y^2}{y^2} \int_{|t|<z(x)} \frac{1-\cos ty}{1+t^2}\,dt\,G(dy) \leqslant \\ &\leqslant x \int_{|y|<\frac{1}{z(x)}} \frac{1+y^2}{y^2} \int_{|t|<z(x)} \frac{t^2y^2}{2(1+t^2)}\,dtG(dy) \leqslant \\ &\leqslant x \int_{|y|>\frac{1}{z(x)}} \frac{1-y^2}{y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos ty}{1+t^2}\,dtG(dy) \leqslant x\left(1 + \frac{1}{z^2(x)}\right) \times \\ &\quad \times z(x) \int_{|y|<\frac{1}{z(x)}} G(dy) + \pi x \int \frac{1+y^2}{y^2}\left(1 - e^{-|y|}\right) G(dy). \end{aligned}$$

В силу (16) и монотонности функции $z(x)$ найдется такое $0 <$ $< x_0 < 1$, что при $0 < x < x_0$, $z(x) > z(x_0) > 1$ и $G\left(\left[-1, -\frac{1}{z(x)}\right) \cup \left(\frac{1}{z(x)}, 1\right]\right) > 0$. Поэтому при $0 < x < x_0$

$$\int\limits_{|y|>\frac{1}{z(x)}} \frac{1+y^2}{y^2}\left(1-e^{-|y|}\right) G(dy) \leqslant 2 \int\limits_{1<|y|<\infty} G(dy) +$$

$$+2 \int\limits_{1 \geqslant |y| > \frac{1}{z(x)}} \frac{G(dy)}{|y|} \leqslant c \int\limits_{1 \geqslant |y| > \frac{1}{z(x)}} \frac{G(dy)}{|y|}.$$

Следовательно, при $0 < x < x_0$ получим

$$J_1(x) \leqslant 2xz(x) \int\limits_{|y| < \frac{1}{z(x)}} G(dy) + c\pi x \int\limits_{1 \geqslant |y| > \frac{1}{z(x)}} \frac{G(dy)}{|y|} \leqslant$$

$$\leqslant 2(c\pi+2)\, xz(x) \int\limits_{[-1,\,1]} \frac{G(dy)}{1+|y|\,z(x)},$$

откуда в силу (7′) имеем $J_1(x) \leqslant \frac{2(c\pi+2)}{z(x)}$. (23) Перейдем к оценке $J_2(x)$. В силу (4)

$$|\operatorname{Im}\psi(t)| \leqslant |\beta t| + \int\limits_{(-\infty,\,\infty)} \left|\sin ty - \frac{ty}{1+y^2}\right| \frac{1+y^2}{y^2} G(dy).$$

Пусть $|t| < z(x)$. Оценим сначала подынтегральную функцию

$$S(y;\ t) = \left|\sin ty - \frac{ty}{1+y^2}\right| \frac{1+y^2}{y^2}.$$

При $|y| > 1$ имеем $S(y;\ t) \leqslant 2(1+|t|)$; при $1/z(x) < |y| \leqslant 1$ $S(y;\ t) \leqslant 3\frac{|ty|}{y^2} \leqslant 6\frac{|t|\,z(x)}{1+|y|\,z(x)}$; при $|y| \leqslant 1/z(x)$ $S(y,\ t) = \frac{1}{y^2}\Big| \times$ $\times\ |\sin ty - ty + y^2 \sin ty| \leqslant \frac{1}{y^2}(|y^3t^3|) + |y^3 t|) \leqslant |yt|\,z^2(x) + |yt| \leqslant$ $\leqslant 4\frac{|t|\,z(x)}{1+|y|\,z(x)}$. Поэтому при $0 < x < 1$, $|t| < z(x)$ $|\operatorname{Im}\psi(t)| \leqslant$

$$\leqslant |\beta t| + 6|t|\,z(x) \int\limits_{[-1,\,1]} \frac{G(dy)}{1+|y|\,z(x)} + 2(1+|t|) \int\limits_{|y|>1} G(dy) \leqslant$$

$\leqslant c(1+|t|)\,z(x) \displaystyle\int \frac{G(dy)}{1+|y|\,z(x)} = c\,\frac{1+|t|}{xz(x)}$. Следовательно,

$$J_2(x) \leqslant \frac{c}{z^2(x)} \int\limits_{|t|<z(x)} \frac{(1+|t|)^2}{1+t^2}\,dt \leqslant \frac{4c}{z(x)}. \tag{24}$$

Из (22) — (24) получим при $0 < x < x_0$ $h_\psi(x) \leqslant \frac{c}{z(x)}$. (25)

Теперь оценим функцию $h_\psi(x)$ снизу. Очевидно,

$$h_\psi(x) \geqslant \int\limits_{|t|<z(x)} \frac{1-\operatorname{Re}\exp(x\psi(t))}{1+t^2}\,dt \geqslant \int\limits_{|t|<z(x)} \frac{1-\exp(x\operatorname{Re}\psi(t))}{1+t^2}\,dt. \tag{26}$$

Сначала покажем, что при $0 < x < 1$, $|t| < z(x)$ выполняется

$$x|\operatorname{Re}\psi(t)| < c. \tag{27}$$

Действительно, используя неравенство $1 - \cos w \leqslant 4w^2/(1+|w|)$ и монотонность дроби $t^2/(1+|y|t)$ по t, будем иметь

$$x|\operatorname{Re}\psi(t)| = x\int\limits_{(-\infty,\ \infty)} (1-\cos ty)\frac{1+y^2}{y^2}G(dy) \leqslant 4x\int\limits_{|y|>1} G(dy) + $$
$$+ 4x\int\limits_{[-1,\ 1]} t^2y^2(1+|yt|)^{-1}\frac{1+y^2}{y^2}G(dy) \leqslant 4\int\limits_{|y|>1} G(dy) +$$
$$+ 8x\int\limits_{[-1,\ 1]}\frac{z^2(x)}{1+|y|z(x)}G(dy) = 4\int\limits_{|y|>1} G(dy) + 8 = c.$$

Из (27) следует, что если $|t| < z(x)$, то $1 - \exp(x\operatorname{Re}\psi(t)) \geqslant \geqslant cx|\operatorname{Re}\psi(t)|$. Поэтому из (26) получим $h_\psi(x) \geqslant cx\int\frac{|\operatorname{Re}\psi(t)|}{1+t^2}dt \geqslant$

$$\geqslant \left(\int\limits_{|y|<\frac{2}{z(x)}} + \int\limits_{1\geqslant|y|>\frac{2}{z(x)}}\right)\left(\frac{1+y^2}{y^2}\int\limits_{|t|<z(x)}\frac{1-\cos ty}{1+t^2}dtG(dy)\right).$$

Заметим, что $\displaystyle\int\limits_{|y|<\frac{2}{z(x)}}\frac{1+y^2}{y^2}\int\limits_{|t|<z(x)}\frac{1-\cos ty}{1+t^2}dtG(dy) \geqslant$

$$\geqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_{|y|<\frac{2}{z(x)}}\frac{1+y^2}{y^2}\int\limits_{|t|<z(x)}\frac{t^2y^2}{1+t^2}dtG(dy) \geqslant cz(x)\int\limits_{|y|<\frac{2}{z(x)}} G(dy).$$

Кроме того, так как $\displaystyle\pi(1-e^{-|y|}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos ty}{1+t^2}dt \leqslant \int\limits_{|t|<z(x)} \times$ $\displaystyle\times\frac{1-\cos ty}{1+t^2}dt + \frac{4}{z(x)}$, то найдется такое $y_0 > 0$, что для $2/z(x) <$

$$< |y| < y_0\int\limits_{|t|<z(x)}\frac{1-\cos ty}{1+t^2}dt \geqslant \pi(1-e^{-|y|}) - \frac{4}{z(x)} \geqslant \pi(1 -$$
$$- e^{-|y|}) - 2|y| \geqslant |y|.$$

Поэтому при достаточно малых x, таких что $z(x) > 2/y_0$, будем иметь $\displaystyle h_\psi(x) \geqslant cxz(x)\int\limits_{|y|<\frac{1}{z(x)}} G(dy) + cx\int\limits_{y_0\geqslant|y|>\frac{2}{z(x)}}\frac{G(dy)}{|y|} \geqslant cxz \times$

$$\times(x)\int\limits_{[-y_0,\ y_0]}\frac{G(dy)}{1+|y|z(x)}.$$

Поскольку в силу (16) $\int\limits_{[-y_0,\ y_0]} \frac{z(x)}{1+|y|z(x)} G(dy) \geqslant c \int\limits_{(-1,\ 1]} \times$ $\times \frac{z(x)}{1+|y|z(x)} G(dy)$, то $h_\psi(x) \geqslant cxz(x) \int\limits_{[-1,\ 1]} \frac{G(dy)}{1+|y|z(x)} = \frac{c}{z(x)}$.

Полученная оценка вместе с (25) дает (21).

2) Пусть имеет место (17). Докажем, что тогда верно (21). Из (17) и (7′) следует, что $z(x) \asymp 1/\sqrt{x}\ (x \to +0)$. Покажем, что $h_\psi(x) \asymp \sqrt{x}\ (x \to +0)$. Так как $\operatorname{Re}\psi(t) \leqslant -ct^2$ для любого t, то, с одной стороны, $h_\psi(x) \geqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\exp(x\operatorname{Re}\psi(t))}{1+t^2} dt \geqslant \int\limits_1^{\infty} \frac{1-e^{-cxt^2}}{t^2} dt =$

$$= \sqrt{x} \int\limits_{\sqrt{x}}^{\infty} \frac{1-e^{-cy^2}}{y^2} dy > c\sqrt{x}.$$

С другой стороны, из оценки $\psi(t) = O(t^2)\ (t \to \pm\infty)$, получим

$$h_\psi(x) \leqslant \int\limits_{|t|<\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{|1-\exp(x\psi(t))|}{1+t^2} dt + 2 \int\limits_{|t|\geqslant\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{dt}{t^2} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|t|<\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{x|\psi(t)|}{1+t^2} dt + 4\sqrt{x} \leqslant c\sqrt{x}.$$

3) Покажем, что если справедливо (18), то выполняется и (6′), и (19). Действительно, из (18) и (7′) следует $z(x) \asymp 1/x\ (x \to +0)$, так что условие (6′) выполняется. Установим справедливость (19). Для этого оценим в (22) функции $J_1(x)$ и $J_2(x)$. Легко видеть, что из (18) вытекает $\operatorname{Re}\psi(t) = O(1)\ (t \to \pm\infty)$, поэтому $J_1(x) = O(x)\ (x \to +0]$. Для оценки $J_2(x)$ заметим, что из (18) и (4) имеем $|\operatorname{Im}\psi(t)| = O(|t|)\ (t \to \pm\infty)$, следовательно, $J_2(x) \leqslant$ $\leqslant c\frac{x^2}{2} \int\limits_{|t|<z(x)} \frac{t^2}{1+t^2} dt \leqslant cx$. Подставляя полученные оценки для $J_1(x)$, $J_2(x)$ и $z(x)$, в (22), будем иметь $h_\psi(x) = O(x)\ (x \to +0)$, что доказывает (19).

Итак, во всех трех рассмотренных случаях условия (6′) и (19) равносильны. Теорема 1 доказана.

Список литературы: 1. *Островский И. В.* О безгранично делимой факторизации.— Теория функций, функц. анализ и их прил. 1980, вып. 34, с. 89—96. 2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1967, 2.— 752 с. 3. *Thorin O.* On the infinite divisibility of the lognormal distrubution.— Scand. Actuar. J., 1977, 3, p. 121—148.

Поступила в редколлегию 15.10.80.