УДК 517.535.4

А. А. ГОЛЬДБЕРГ

О СУММЕ ДЕФЕКТОВ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Как и в [1] в данной заметке без пояснений использованы стандартные обозначения неванлинновской теории [2], а через $Q(r, f)$ обозначена любая величина, для которой $Q = 0(T(r, f))$, $r \to \infty$, возможно, вне системы интервалов конечной суммарной длины в случае функции f бесконечного порядка. В [3, с. 89] поставлена следующая задача: пусть f — мероморфная функция с $\delta(\infty, f) = 0$. Может ли выполняться $\Sigma\delta(a, f) + \Sigma\delta(a, f') = 4$? Если нет, то что является точной оценкой? Здесь будет доказана

Теорема. *Пусть f — трансцендентная мероморфная в конечной плоскости функция конечного порядка с $\delta(\infty, f) = 0$. Тогда*

$$\sum_a \delta(a, f) + \sum_a \delta(a, f') \leqslant 3, \tag{1}$$

причем равенство в (1) *возможно лишь тогда, когда* $\sum\limits_{a \neq \infty} \delta(a, f) = 2$, $\delta(0, f') = 1$. *Для* $f(z) = \operatorname{tg} z$ *имеем*

$$\delta(i, f) = \delta(-i, f) = \delta(0, f') = 1$$

Лемма. *Пусть f — трансцендентная мероморфная в конечной плоскости функция, для которой выполняется*

$$N_1(r, \infty, f) = Q(r, f), \quad r \to \infty. \tag{2}$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \sum_{a \neq \infty} \delta(a, f) + \sum_{a \neq \infty} \delta(a, f') \leqslant 2. \tag{3}$$

Неравенство (3) *останется в силе, если дефекты δ заменить их модификацией δ^* в смысле* [2, с. 203].

Доказательство. В [1] при условии (2) было доказано неравенство

$$2m(r, 1/f') + m(r, f'/f'') \leqslant 2T(r, f') + Q(r, f). \tag{4}$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства $(r \geqslant r_0)$

$$m(r, f'/f'') \geqslant \Big(\sum_{a \neq 0,\, \infty} \delta(a; f') - \varepsilon\Big) T(r, f') + Q(r, f), \tag{5}$$

$$m(r, 1/f') \geqslant (\delta(0, f') - \varepsilon)\, T(r, f'), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} 2T(r, f) + Q(r, f) \geqslant T(r, f') \geqslant m(r, 1/f') + 0(1) \geqslant \\ \geqslant \Big(\sum_{a \neq \infty} \delta(a, f) - \varepsilon\Big) T(r, f) + Q(r, f). \end{aligned} \tag{7}$$

Неравенство (5) и последнее неравенство в (7) уже использовались в [1] (см. (7) и (8) в [1]), первое неравенство в (7) см.

в [2, с. 131], неравенство (6) следует из определения дефекта. Из (4) — (7) вытекает

$$\Big(\sum_{a\neq\infty}\delta(a, f)-\varepsilon\Big)T(r, f)+\Big(\sum_{a\neq\infty}\delta(a, f')-2\varepsilon\Big)T(r, f')\leqslant$$
$$\leqslant 2T(r, f')+Q(r, f). \tag{8}$$

Можно считать, что $\sum\limits_{a\neq\infty}\delta(a, f)>0$, иначе (3) тривиально. Тогда из (7) следует, что $Q(r, f)=Q(r, f')$, и из (7) и (8) легко получаем (3). Чтобы получить в (3) вместо δ величины δ^*, надо незначительно изменить рассуждения (ср. доказательство теоремы 6.2 на с. 206 в [2]). Лемма доказана.

Ниже мы во многих местах не отмечаем возможность замены δ на δ^*, хотя и будем этим пользоваться.

Доказательство теоремы. Нетрудно проверить, что

$$\max\left\{x+y\colon\ x\in[0, 2],\ y\in[0, 2],\ \frac{1}{2}x+y\leqslant 2\right\}=3,$$

причем максимум достигается лишь в точке (2, 1). Поэтому из (3) следует, что

$$\sum_{a\neq\infty}\delta(a, f)+\sum_{a\neq\infty}\delta(a, f')\leqslant 3. \tag{9}$$

Равенство в (9) достигается лишь в том случае, когда первая сумма равна 2, но тогда [1] $\sum\limits_{a\neq\infty}\delta(a, f')=\delta(0, f'=1$.

Пусть теперь выполнены условия теоремы 1 и соотношение (2). Можно считать, что $\sum\limits_{a}\delta(a, f)=\sum\limits_{a\neq\infty}\delta(a, f)\geqslant 1$, иначе (1) тривиально. Тогда из неравенства (7), в котором можно взять $Q(r, f)=0(\ln r)$, неравенства $m(r, f')\leqslant m(r, f)+0(\ln r)$ и $\delta(\infty, f)=0$ следует, что $\delta(\infty, f')=0$. Таким образом, неравенства (9) и (1) равносильны. Остается освободиться от ограничения (2).

Пусть для f не выполняется (2). Тогда существует бесконечная последовательность (z_k) кратных полюсов f. Согласно одной теореме П. П. Белинского [4, § 1; 5, теорема 13] существует такая последовательность (ρ_k), $0<\rho_k<1$, что для любой функции $w=\psi(z)$, аналитической и однолистной в $D=\boldsymbol{C}\diagdown\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}K_k$, $K_k=\{z:|z-z_k|<\rho_k\}$ найдется такая дробно-линейная функция L, что

$$|L(\psi(z))-z|<1,\quad z\in D. \tag{10}$$

Пусть F — риманова поверхность, на которую f отображает $\boldsymbol{C}$. Пусть $w_k=f(z_k)\in F$ — алгебраическая точка ветвления F над $w=\infty$. Возьмем столь малую круговую окрестность U_k алгебраической точки ветвления w_k, чтобы $f^{-1}(U_k)\Subset K_k$. Пусть h_k — гомеоморфное преобразование, переводящее U_k в риманову поверхность U_k', полностью накрывающую ту же окрестность $w=\infty$, что и U_k, причем h_k оставляет неподвижными точки на границе U_k, а алгебраическую точку ветвления $w_k \in U_k$ над ∞ переводит в единственную алгебраическую точку ветвления поверхности U_k', которая лежит над конечной точкой. Удалив из F окрестности U_k и вставив в образовавшиеся «дыры» поверхности U_k', получим новую односвязную риманову поверхность F_1. Риманова поверхность F отображается гомеоморфно на F_1 с помощью отображения h, тождественного на $F \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ и совпадающего с h_k на U_k. Пусть мероморфная функция $w_1 = f_1(\zeta)$ отображает $\{\zeta : |\zeta| < R\}$, $0 < R \leqslant \infty$, на F_1. Очевидно, функция f_1 имеет только простые полюсы. Отображение $\psi = f_1^{-1}(h(f))$ конечной z-плоскости на $\{\zeta : |\zeta| < R\}$ гомеоморфно, а в D — конформно и однолистно. Из (10) следует, что $R = \infty$, $L(\infty) = \infty$. Функцию f_1 можно считать нормированной так, что $|\psi(z) - z| < 1$ при $z \in D$, откуда следует, что

$$|\psi(z) - z| < 3, \quad z \in \boldsymbol{C}. \tag{11}$$

Обозначим через γ_r образ окружности $\{z : |z| = r\}$ при отображении ψ. Из (11) следует, что

$$r - 3 \leqslant \min\{|\zeta| : \zeta \in \gamma_r\} \leqslant \max\{|\zeta| : \zeta \in \gamma_r\} \leqslant r + 3. \tag{12}$$

Если определить $n_\gamma(r, a, f_1)$ и $\delta_\gamma^*(a, f_1)$ так, как это сделано в [2, с. 212], то очевидно, что $n_\gamma(r, a, f_1) \equiv n(r, a, f)$, $\delta_\gamma^*(a, f_1) = \delta^*(a, f)$. По теореме 6.8 [2, с. 212], условия которой выполнены в силу (12), имеем $\delta_\gamma^*(a, f_1) = \delta^*(a, f_1)$. Но для f_1 выполняется (2), более того, $N_1(r, \infty, f_1) \equiv 0$. Поэтому, записав (1) для δ^*-дефектов, что, как легко видеть, законно, имеем

$$\sum_a \delta^*(a, f_1) + \sum_a \delta^*(a, f_1') \leqslant 3.$$

Отсюда, учитывая $\delta^*(a, f_1) = \delta^*(a, f) \geqslant \delta(a, f)$ (см. [2, с. 206, теорема 6.3]) и аналогичное неравенство $\delta^*(a, f_1') \geqslant \delta(a, f')$ получаем (1) для функции f.

Замечание. Проведенные во второй половине этой заметки рассуждения показывают, что в лемме, как и в теореме 2 из [1], для функций конечного порядка можно отбросить условие (2). Мюс [6, теорема 3] доказал, что если $N_1(r, \infty, f) = 0(N(r, \infty, f))$, $r \to \infty$, то $\sum_{a \neq \infty} \delta(a, f^{(n)}) \leqslant 1$ при $n \geqslant 2$. Точно так же для функций f конечного порядка ограничение на $N_1(r, \infty, f)$ в этом результате Мюса можно отбросить.

Список литературы: 1. *Гольдберг А. А.* О дефектных значениях производной мероморфной функции с максимальной суммой дефектов.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Харьков, 1979, вып. 32, с. 2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., Наука, 1970. 592 с. 3. *Drasin D.* An introduction to potential theory and meromorphic functions. Complex Anal. and Appl. Lect. Int. Semin. Course, Trieste, 1975; 1976, vol. 1, p. 1—93. 4. *Белинский П. П., Гольдберг А. А.* Применение одной теоремы о конформных отображениях к вопросу об инвариантности дефектов мероморфных функций.— Укр. мат. журн., 1954, т. 6, № 1, с. 128—134. 5. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск, Наука, 1974. 210 с. 6. *Mues E.* Ueber eine Defect— und Verzweigungsrelation für die Ableitung meromorpher Funktionen.— Manuscr. math., 1971, Bd. 5, S. 275—297.

Поступила 18 марта 1978 г.