УДК 517.55

Ф. И. ГЕЧЕ

ДИАГРАММА НЬЮТОНА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИЗУЧЕНИЮ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА КРАТНОГО РЯДА ЛОРАНА. III

Эта часть работы посвящается доказательству теорем 10 и 11 [19]. Терминология и обозначения взяты из работ [17, 19, 15].

§ 6. Вспомогательные утверждения

Результаты этого параграфа примыкают к исследованиям Вейля [20].

Определение. *Пусть $z_0, \ldots, z_q$ — аффинно независимые точки из Z^n. Множество всевозможных точек вида $z = z_0 + k_1(z_1 - z_0) + \ldots + k_q(z_q - z_0)$, $k_1, \ldots, k_q \in Z$ будем называть решеткой, а $\{z_0, \ldots, z_q\}$ — базисом этой решетки. Скажем, что аффинное множество $H \subset R^n$ обладает решеткой, если существует такая решетка E, что* $\operatorname{conv} E = H$.

Очевидно, q-мерное аффинное множество $H \subset R^n$ обладает решеткой тогда и только тогда, когда в H существует аффинно независимая система точек $z_0, \ldots, z_q$, принадлежащих Z^n.

Определение. *Пусть $a \in R^n \setminus \{0\}$. Прямая l называется a-прямой, если она параллельна вектору a и множество $l \cap Z^n$ состоит из одной точки. Если вектор a $(a \neq 0)$ параллелен аффинному множеству H, то через $M_a(H)$ обозначается замыкание множества всех точек всевозможных a-прямых, лежащих в H.*

Лемма 9. *Если q-мерное аффинное множество $H \subset R^n$ $(q \geqslant 2)$ обладает решеткой, то множество $M_a(H)$ либо пусто, либо совпадает с H, либо представляется в виде $M_a(H) = \bigcup\limits_{i \in I} Q_i$, где Q_i — p-мерные аффинные подмножества H, параллельные друг другу, $2 \leqslant p < q$, I — некоторое непустое множество.*

Доказательство. Пусть H обладает решеткой E с базисом $\{z_0, \ldots, z_q\}$. Не ограничивая общности, можем считать, что $z_0 = 0 \in E$. Тогда $a = \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_q z_q$ $(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q))$. Возможны три случая: 1) $(\exists t_0 \in \hat{R})\, t_0 a \in Z^n$; 2) $(\forall u \in Z^q \setminus \{0\}) < u, \alpha > \neq 0$; 3) не имеют места утверждения первых двух случаев.

Легко видеть, что случай 3 исключается при $q = 2$. В первом случае, очевидно, не существует a-прямая, т. е. $M_a(H) = \varnothing$.

В случае 2 имеет место равенство $M_a(H) = H$. В самом деле, пусть L — линейное отображение, переводящее векторы $z_1, \ldots, z_q$ соответственно в $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_q = (0, 0, \ldots, 1)$. Тогда L отображает H на R^q взаимно однозначно, причем $L(E) = Z^q$, $L(a) = \alpha$, $M_\alpha(R^q) \subset L(M_a(H))$.

Так как $< u, \alpha > \neq 0$ при $u \in Z^q \setminus \{0\}$, то из результатов Кронеккера [21] и Вейля [20, теорема 4] или [22, с. 76] следует, что $M_\alpha(R^q) = R^q$. Следовательно, $L\ (M_a(H)) = R^q$ и $M_a(H) = H$.

В третьем случае доказательство проводим методом индукции по q $(q \geqslant 3)$. Пусть $v \in Z^q \setminus \{0\}$ такое, что $< v, \alpha > = 0$. Выберем целое число d настолько большим, чтобы система уравнений $< z_1, \zeta > = v_1 d_1, \ldots, < z_q, \zeta > = v_q d$ имела решение $\zeta \in Z^n$. Так как векторы $z_1, \ldots, z_q$ линейно независимы и $v \neq 0$, то решение существует и $\zeta \neq 0$. Пусть для определенности $\zeta_n \neq 0$ $(\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n))$. Положим $H_0 = \{x \in H : < \zeta, x > = 0\}$. Очевидно, $H_0 \neq H$, следовательно H_0 — аффинное множество размерности $q - 1$. Полагая $z_i = (\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)})$, $i = 1, \ldots, q$, выберем $z_{i_1}, \ldots, z_{i_{q-1}}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{q-1} \leqslant q)$ так, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} \xi_1^{(i_1)} & \ldots & \xi_{n-1}^{(i_1)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_1^{(i_{q-1})} & \ldots & \xi_{n-1}^{(i_{q-1})} \end{pmatrix}$$

имела ранг $q-1$. Определим числа $\eta_1, \ldots, \eta_{q-1}$ так, чтобы $w_j = (\zeta_n \xi_1^{(i_j)}, \ldots, \zeta_n \xi_{n-1}^{(i_j)}, \eta_j) \in H_0$. Очевидно, $\eta_j = -(\zeta_1 \xi_1^{(i_j)} + \ldots + \zeta_{n-1} \xi_{n-1}^{(i_j)}) \in Z$, следовательно, $w_j \in Z^n$, $j = 1, \ldots, q-1$. Ясно, что система точек $0, w_1, \ldots, w_{q-1}$ аффинно независима и является базисом решетки в H_0. Далее, $a \in H_0$, потому что $< \zeta, a > = \alpha_1 < z_1, \zeta > + \ldots + \alpha_q < z_q, \zeta > = d(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_q v_q) = 0$.

Итак, множество H_0 обладает решеткой и содержит a-прямую, проходящую через 0 и a. Тогда по предположению индукции либо $M_a(H_0) = H_0$, либо $M_a(H_0) = \bigcup\limits_{i \in I_0} Q_i$, где Q_i — p-мерные аффинные подмножества H_0 (а значит, и H), параллельные друг другу; $2 \leqslant p \leqslant q-2$; I_0 — непустое множество.

Пусть l — a-прямая в H, а l' — произвольная прямая. Она является a-прямой в H тогда и только тогда, когда $l = l' + z$ при некотором $z \in H \cap Z^n$. Значит, при любом $z \in H \cap Z^n$ множество $M_a(H_0) + z$ совпадает с замыканием множества точек некоторой совокупности a-прямых из H. Наоборот, для любой a-прямой $l \in H$ существует такое $z \in H \cap Z^n$, что $l \in M_a(H_0) + z$. Следовательно, $M_a(H) = \mathrm{cl}\left(\bigcup\limits_{z \in H \cap Z^n} (M_a(H_0) + z)\right) = \bigcup\limits_{i \in I} Q_i$, где Q_i — p-мерные аффинные подмножества H, $p \leqslant q-1$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $H \subset R^n$ — m-мерное аффинное множество, обладающее решеткой ($1 \leqslant m \leqslant n$). Далее, S — m-мерный симплекс с вершинами из $Z^n \cap H$, $a \in H \setminus \{0\}$ и $T = \bigcup\limits_{\lambda \in R} (S + \lambda a)$. Тогда множество $T \cap Z^n$ бесконечно.*

Доказательство. При $m = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно при любом натуральном числе $< m$. Обозначим через $z_0, \ldots, z_m$ вершины m-мерного симплекса S. Если на прямой $l_0 = \{x \in R^n : x = z_0 + \lambda a\}$ лежат по крайней мере две точки Z^n, утверждение леммы очевидно. Пусть l_0 является a-прямой. Если $M_a(H) = H$ (это верно при $m = 2$), то утверждение леммы выполняется. Пусть $m \geqslant 3$ и $M_a(H) \neq H$. Согласно лемме 9 имеет место равенство (43), где Q_i — аффинные множества размерности p, $2 \leqslant p \leqslant m-1$. Через a-прямую l_0 проходит некоторое аффинное множество Q_{i_0}, $i_0 \in I$.

Предположим сначала, что множество Q_{i_0} содержит по крайней мере p вершин $z_0, \ldots, z_{p-1}$ симплекса S. Обозначим через H' множество $\mathrm{aff}\{z_0, \ldots, z_{p-1}\}$ размерности $p-1$. Пусть сначала $l_0 \subset H'$. Очевидно, в множестве H' имеется решетка. По предположению индукции существует бесконечное число a-прямых, которые пересекают симплекс $\mathrm{conv}\{z_0, \ldots, z_{p-1}\}$, а значит, и симплекс S. Пусть теперь $l_0 \not\subset H'$. Тогда $T' = \bigcup\limits_{\lambda \in R} [\mathrm{conv}\{z_0, \ldots, z_{p-1}\} + \lambda a]$ является p-мерным выпуклым подмножеством множества Q_{i_0}. Так как множество a-прямых всюду плотно в Q_{i_0}, то множество T' содержит бесконечно много a-прямых. Утверждение леммы следует из включения $T' \subset T$.

Предположим, что множество Q_{i_0} содержит $q+1$ вершин $z_0, \ldots, z_q$ симплекса S, причем $q \leqslant p-2$. Через вершину z_{q+1} симплекса S проходит аффинное множество Q_{i_1}, $i_1 \in I$. Так как аффинные множества Q_{i_0} и Q_{i_1} параллельны, то

$$Q_{i_1} = Q_{i_0} + z_{q+1} - z_0. \tag{44}$$

Если множество Q_{i_1} содержит r вершин $z_{q+1}, \ldots, z_{q+r}$ симплекса S, то $q + r \leqslant p + 1$. Это следует из равенства (44) и линейной независимости системы $z_1 - z_0, \ldots, z_{q+r} - z_0$.

Пусть $q + r \leqslant m - 1$, что наверняка имеет место при $p < m - 1$. Итак, $z_m \overline{\in} Q_{i_0} \cup Q_{i_1}$. Через точку z_m проходит аффинное множество Q_{i_2}, $i_2 \in I$. Построим три отличных друг от друга параллельных гиперплоскости Π_0, Π_1, Π_2, содержащих соответственно плоскости $Q_{i_0}, Q_{i_1}, Q_{i_2}$ [см., например, 15, теорему 11.2]. Если $p = m - 1$, то $\Pi_j = Q_{i_j}$, $j = 1, 2, 3$. Средняя из гиперплоскостей Π_0, Π_1, Π_2 (пусть это Π_2) пересекает множество T по $(m-1)$-мерному множеству. Тогда множество $T \cap Q_{i_2}$ имеет размерность p и, следовательно, содержит бесконечно много a-прямых. Остается доказать невозможность равенств $p = m - 1$ и $q + r = m$. Если эти равенства верны, то T лежит между двумя параллельными гиперплоскостями Q_{i_0} и Q_{i_1}. Через точку z_0 проходит $(m-1)$-мерная грань симплекса S, которая пересекается с гиперплоскостью Q_{i_0} по $(m-2)$-мерной грани. Следовательно, $(m-1)$-мерная плоскость Q_{i_0} содержит $m-1$ вершин симплекса S. Но это противоречит условию $q \leqslant p - 2 = m - 3$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть выполняются условия леммы 10. Тогда бесконечно пересечение множества $T \cap Z^n$ и любого полупространства в R^n, граница которого не параллельна вектору a.*

§ 7. Основные свойства функции следа

Прежде чем доказывать теорему 10, изучим свойства функции C_A.

Теорема 15. *Любая функция $C: R^n \to \overline{R}$ является функцией следа некоторого ряда A вида* (1) *с непустой областью сходимости тогда и только тогда, когда:*

1) *C является замкнутой собственной выпуклой функцией и* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} C) \neq \varnothing$ *в пространстве R^n;*

2) $\nabla C(x) \in Z^n$ *в любой точке $x \in R^n$, в которой дифференцируема функция C;*

3) *существует такое множество $K' \subset Z^n$,* что $\operatorname{cl}(\operatorname{conv} K') = \operatorname{cl}(\operatorname{dom} C^*)$. *При этом верны равенства*

$$\operatorname{Cl}(\operatorname{dom} C^*) = \{x \in R^n : (C0^+)(y) \geqslant \langle x, y \rangle,\ \forall y \in R^n\} =$$

$$= \{x \in R^n: \sup_{z \in \mathrm{dom} C} [C(y+z) - C(z)] \geqslant \langle x, y \rangle, \ \forall y \in R^n\}. \quad (45)$$

Для любой функции $C: R^n \to \overline{R}$ *со свойствами* 1 *и* 2 *существует ряд* A *вида* (1), *который имеет диаграмму Ньютона и удовлетворяет соотношениям* $\mathrm{dom}\, C \subset \mathrm{dom}\, C_A$, $C_A(x) = C(x)$ *при* $x \in \mathrm{dom}\, C$.

Доказательство. Свойство 1 для функции следа C_A следует из равенства $C_A = \Delta_A^*$ [см. 15, лемму 8 и теорему 12.2]. При этом $\mathrm{dom}\, C_A = \ln(\Lambda_A^*)$, $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\, C_A) = \ln(\mathring{\Lambda}_A) \neq \varnothing$. Функция C_A может быть дифференцируемой только в точках из $\ln(\mathring{\Lambda}_A)$. В силу теоремы 7 функция m_A дифференцируема в точке $r' \in \mathring{\Lambda}_A$, если и только если $r' \in \Omega_{k'}$, $k' = k'(r') \in K^*$. Но $m_A(r) = a_{k'} r^{k'}$, когда $r \in \Omega_{k'}$. Значит, при $x = \ln r$

$$\nabla C_A(x) = \nabla \ln m_A(e^x) = \nabla \ln(a_{k'} \exp \langle k', x \rangle) = k', \ x \in \ln(\Omega_{k'}).$$

Свойство 3 выполняется на множестве $K' \doteq K$, так как

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}\, K) = \overline{Q}_\delta = \mathrm{cl}(\mathrm{dom}\, \Delta_A) = \mathrm{cl}(\mathrm{dom}\, C_A^*), \ \Delta_A^{**} = \Delta_A.$$

Равенство (45) докажем для произвольной функции $C: R^n \to \overline{R}$ со свойством 1. Полагая $g_x(y) = C(y) - \langle x, y \rangle$, из следствия 13.3.4 [15] получаем

$$\mathrm{cl}(\mathrm{dom}\, C^*) = \{x \in R^n : (g_x 0^+)(y) \geqslant 0, \ \forall y \in R^n\}. \quad (46)$$

Очевидно, $\mathrm{dom}\, g_x = \mathrm{dom}\, C$. Согласно теореме 8.5 [15]

$$(g_x 0^+)(y) = \sup_{z \in \mathrm{dom} g_x} [g_x(y+z) - g_x(z)] =$$

$$= \sup_{z \in \mathrm{dom} C} [C(y+z) - C(z) - \langle x, y \rangle] = (C0^+)(y) - \langle x, y \rangle =$$

$$= \sup_{z \in \mathrm{dom} C} [C(y+z) - C(z)] - \langle x, y \rangle, \ y \in R^n. \quad (47)$$

Из соотношений (46) и (47) следуют равенства (45).

Докажем последнее утверждение теоремы. Пусть функция C обладает свойствами 1 и 2. Рассмотрим множество $K^* = \{k \in Z^n : k = \nabla C(x^{(k)}, x^{(k)} \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, C)\}$ и построим ряд B: $\sum_{k \in K^*} b_k z^k$, где

$$b_k = \exp[C(x^{(k)}) - \langle k, x^{(k)} \rangle], \ k \in K^*. \quad (48)$$

Коэффициенты b_k не зависят от выбора точек $x^{(k)}$. Действительно, положим $G_k = \{x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, C) : \nabla C(x) = k\}$, $k \in K^*$. Пусть x, $x' \in G_k$. Пользуясь теоремой 25.1 [15], легко получаем равенство $C(x) - \langle k, x \rangle = C(x') - \langle k, x' \rangle$. Отметим, что множество K^* не пусто, но может быть конечным и даже одноточечным множеством [см. 15, теорему 25.5]. Ряд B сходится, по крайней мере, в области $G = \{z \in C^n : (\ln|z_1|, \ \ldots, \ \ln|z_n|) \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, C)\}$. В самом деле, пусть $x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, C)$, $x' = (x_1 + \varepsilon, \ \ldots, \ x_n + \varepsilon) \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\, C)$, где $\varepsilon > 0$. В силу теоремы 25.1 [15] можем написать соотношения

$$C(x') \geqslant C(x^{(k)}) + \langle \nabla C(x^{(k)}), x' - x^{(k)} \rangle = \langle k, x' \rangle + \ln b_k, \quad (49)$$

откуда $C(x') \geqslant <k, x> + \ln b_k + |k|\varepsilon$. Отсюда заключаем, что ряд B сходится в точке e^x, а значит, по крайней мере, в области G. Из теорем 4 и 5 следует, что ряд B обладает диаграммой Ньютона и $\operatorname{int}(\operatorname{dom} C) \subset \ln(\mathring{\Lambda}_B)$. Для доказательства последнего утверждения теоремы остается доказать равенство

$$C_B(x) = C(x) \tag{50}$$

при всех $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} C)$. После этого можем написать $\operatorname{dom} C \subset \subset \operatorname{dom} C_B$. Прежде всего заметим, что точка представления P_l любого коэффициента ряда B является диаграммной точкой. Действительно, полагая в выражении (49) $x' = x^{(l)}$ получаем неравенства $-\ln b_k \geqslant <k-l, x^{(l)}> - \ln b_l$; $k, l \in K^*$. Отсюда следует, что плоскость H, проходящая через точку P_l и имеющая уравнение $\xi = <x^{(l)}, x-l> - \ln b_l$, является опорной гиперплоскостью диаграммы δ_B. Итак, $P_l \in \delta_B$, $l \in K^*$. Очевидно, $H = H_B(\exp x^{(l)})$, следовательно, $C_B(x^{(l)}) = <l, x^{(l)}> + \ln b_l = C(x^{(l)})$. Так как в качестве $x^{(l)}$ можно брать произвольную точку из G_l, то равенство (50) верно в G_l. Оно сохраняется и в области $\operatorname{int}(\operatorname{dom} C)$ в которой функции C и C_B непрерывны. В самом деле, в силу теоремы 25.5 [15] множество $\bigcup_{l \in K^*} G_l$ плотно в $\operatorname{int}(\operatorname{dom} C)$. Справедливость равенства (50) на множестве $\operatorname{cl}(\operatorname{dom} C)$ следует теперь из условия выпуклости функций C и C_B.

Вообще говоря, $\operatorname{int}(\operatorname{dom} C) \neq \operatorname{int}(\operatorname{dom} C_B) = \ln(\mathring{\Lambda}_B)$ и в произвольной точке $x \in R^n$ можно записать только неравенство

$$C_B(x) \leqslant C(x). \tag{51}$$

Наконец, пусть функция C удовлетворяет всем трем условиям теоремы. Положим $K = Z^n \cap \operatorname{cl}(\operatorname{dom} C^*)$. Тогда

$$\operatorname{cl}(\operatorname{conv} K) = \operatorname{cl}(\operatorname{dom} C^*), \tag{52}$$

причем $K^* \subset K$, что следует из включения $K^* \subset \operatorname{dom} C^*$ [15, с. 244]). Определим ряд A согласно формуле (1), положив

$$A_k = a_k = \begin{cases} b_k, & \text{если } k \in K^*; \\ \exp(-C^*(k)), & \text{если } k \in K \setminus K^* \ (e^{-\infty} = 0). \end{cases} \tag{53}$$

В силу неравенства (51) $C^* \leqslant \overset{*}{C_B} = \Delta_B$. Кроме того, $C^* \leqslant \Delta_A \leqslant \leqslant \Delta_B$. Переходя к сопряженным функциям, получаем неравенства $C_B \leqslant C_A \leqslant C$, которые вместе с (50) дают равенство

$$C_A(x) = C(x), \ x \in \operatorname{cl}(\operatorname{dom} C). \tag{54}$$

Остается доказать, что $C_A(x) = \infty$, когда $x \,\overline{\in}\, \operatorname{cl}(\operatorname{dom} C)$. Пусть, вопреки утверждению, в некоторой точке $x^{(0)} \,\overline{\in}\, \operatorname{cl}(\operatorname{dom} C)$ имеет место неравенство $C_A(x^{(0)}) < \infty$. В множестве $M = \operatorname{conv}[\{x^{(0)}\} \cup \cup \operatorname{dom} C]$ существует такая точка x', что $x' \,\overline{\in}\, \operatorname{cl}(\operatorname{dom} C)$, но x' входит в M вместе с некоторой окрестностью U. В силу предположения и равенства (54) имеют место включения $U \subset M \subset$

$\subset \operatorname{dom} C_A$, следовательно, $U \subset \ln(\Lambda_A)$, $x' \in \ln(\mathring{\Lambda}_A)$. В силу леммы 3 существует опорная гиперплоскость H' диаграммы δ_A с уравнением $\xi = \langle x', x\rangle + \xi'$. Из условия $x' \in \operatorname{cl}(\operatorname{dom} C)$ следует, что $C(x') = -\inf\limits_{x\in R^n} [C^*(x) - \langle x', x\rangle] = -\inf\limits_{x\in R^n} [C^*(x) - \langle x', x\rangle - \xi'] = +\infty$. Последнее равенство возможно только тогда, когда неограничено множество $E_1 = \{x \in R^n : C^*(x) \leqslant \langle x', x\rangle + \xi'\}$. В силу теоремы 3 множество $\delta_A \cap H'$ содержит хотя бы одну точку представления $P_{k^{(0)}}$ ряда A. Так как $C^*(k^{(0)}) \leqslant \Delta_A(k^{(0)})$, то $k^{(0)} \in E_1$. Множество E_1 выпукло и замкнуто, потому что выпуклая функция $x \to C^*(x) - \langle x', x\rangle$ полунепрерывна снизу. Отсюда следует, что неограниченное множество E_1 содержит некоторый луч l_0 с началом $k^{(0)}$. Обозначим через i размерность множества $\operatorname{dom} C^*$. Так как $l_0 \subset \operatorname{dom} C^*$, то $i \geqslant 1$. Согласно равенству (52) и теореме 2.4 [15] выберем $i+1$ аффинно независимых точек $k^{(1)}, \ldots, k^{(i+1)}$ в множестве K и положим $S = \operatorname{conv}\{k^{(1)}, \ldots, k^{(i+1)}\}$. Определим число ξ'' ($\xi'' > \xi'$) так, чтобы гиперплоскость H'' с уравнением $\xi = \langle x', x\rangle + \xi''$ проходила над точками $P_{k^{(1)}}, \ldots, P_{k^{(i+1)}}$. Очевидно, замкнутое выпуклое множество $E_2 = \{x \in R^n : C^*(x) \leqslant \langle x', x\rangle + \xi''\}$ содержит множество E_1 и симплекс S, а значит и лучи $l_1, \ldots, l_{i+1}$, параллельные лучу l_0 и имеющие начало в вершинах симплекса S. Из включения $S \subset \operatorname{dom} C^*$ следует, что множество $H = \operatorname{aff}(\operatorname{dom} C^*)$ обладает решеткой. На основании следствия леммы 10 можем заключить, что множество $K'' = E_2 \cap Z^n$ бесконечно. Далее, $K'' \subset K$, так как $E_2 \subset \operatorname{dom} C^*$. Из определения множества E_2 и соотношений (53) следует, что точки представления P_k ($k \in K''$) коэффициентов ряда A лежат не выше гиперплоскости H'' с $x' \in \ln(\mathring{\Lambda}_A)$. Но это противоречит утверждению леммы 4, так как множество K'' бесконечно. Теорема 15 доказана.

Замечание 1. Условия теоремы 15 независимы. Например, функция φ^*, равная 0 при $2x_1 + \sqrt{2}x_2 \leqslant 2$ и $+\infty$ в других точках R^2, является сопряженной к функции φ, равной x_1 при $x_1 = \sqrt{2}x_2 \geqslant 0$ и $+\infty$ в остальных точках R^2. Следовательно, φ^* обладает свойством 1. Далее, $\nabla\varphi^*(x) = (0, 0) \in Z^2$, когда $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}\varphi^*)$. Но φ не может быть диаграммной функцией никакого ряда, значит φ^* не является функцией следа.

Замечание 2. Область сходимости D_A и функция следа C_A ряда A связаны равенством (см. доказательство теоремы 15 и теорему 4) $\hat{D}_A = \{z \in C^n : (\ln|z_1|, \ldots, \ln|z_n|) \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} C_A)\}$. Отсюда следует необходимая часть теоремы Гартогса [23, с. 144]. Доказательство достаточности непросто [см. 23], тем не менее для широкого класса областей верно даже более сильное утверждение — теорема 11 (доказательство опирается на теорему 15).

§ 8. Доказательство теорем 10 и 11

Доказательство теоремы 10 непосредственно следует из теоремы 15, следствия 2 к теореме 8, равенства (34) и такого замечания: множество $\overline{R}^n_+ \setminus \hat{R}^n$ может быть разбито на конечное число подмножеств, на каждом из которых сужение функции m_A является функцией максимального члена ряда с меньшим числом переменных.

Доказательство теоремы 11. Определим функцию C так:

$$C(x) = \delta(x \mid \mathrm{cl}(\ln(\hat{D}^+))) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \mathrm{cl}(\ln(\hat{D}^+)); \\ +\infty, & \text{если } x \in R^n \setminus \mathrm{cl}(\ln(\hat{D}^+)). \end{cases}$$

Условиям 1 и 2 теоремы 15 удовлетворяет C, как индикаторная функция. Проверим условие 3. Формула (45) приобретает вид

$$\mathrm{cl}(\mathrm{dom}\, C^*) = \{x \in R^n : \sup_{z \in \mathrm{cl}(\ln(\hat{D}^+))} [C(y+z) - C(z)] \geqslant \langle x, y \rangle, \quad \forall y \in R^n\}. \tag{55}$$

Согласно теоремам 8.5 и 8.3 [15] можем написать

$$\sup_{z \in \mathrm{cl}(\ln(\hat{D}^+))} [C(y+z) - C(z)] = C0^+(y) = \\ = \delta(\cdot \mid \mathrm{cl}(\ln \hat{D}^+))\, 0^+(y) = \delta(y \mid 0^+ \ln(\hat{D}^+)). \tag{56}$$

Из равенств (55), (56) и результатов § 14 работы [15] следует, что множество $\mathrm{cl}(\mathrm{dom}\, C^*)$ является полярой рецессивного конуса выпуклого множества $\ln(\hat{D}^+)$. В силу условия теоремы и лемм 14.2.1, 14.6.1 [15] имеет место равенство $\dim(\mathrm{dom}\, C^*) = n$, следовательно, $\mathrm{cl}(\mathrm{dom}\, C^*) = \mathrm{cl}(\mathrm{conv}\, K')$, где $K' = Z^n \cap \mathrm{cl}(\mathrm{dom}\, C^*)$. Тем самым условие 3 теоремы 15 также проверено и $C = C_A$ для некоторого ряда A. Так как $0 \in D$, то рецессивный конус множества $\ln(\hat{D}^+)$ включает в себя конус R^n_-. Поэтому поляра $\mathrm{cl}(\mathrm{dom}\, C^*)$ рецессивного конуса множества $\ln(\hat{D}^+)$ лежит в множестве R^n_+. Но в силу леммы 10 $\Delta_A = C^*$, следовательно, $Q_\delta = \mathrm{dom}\, \Delta_A \subset R^n_+$. Это означает, что ряд A является рядом Тейлора.

В силу теоремы 13. 2 [15] диаграммная функция Δ_A равняется опорной функции $\delta^*(\cdot \mid \ln(\hat{D}^+))$ множества $\ln(\hat{D}^+)$. Очевидно, множество $\mathrm{epi}\, \Delta_A = W_A$ является конусом размерности $\dim \times (\mathrm{dom}\, C^*) + 1 = n + 1$. Функция следа C_A дифференцируема в $\ln(\hat{D}^+)$ и ее градиент тождественно равен $0 \in R^n$. В случае надобности можем увеличить (например, на 1) все коэффициенты ряда A, кроме a_0, так что единственной диаграммной точкой будет точка представления P_0 (при этом множество W_A не изменяется). Очевидно, a_0 будет единственным максимальным членом ряда A.

Пусть теперь A' — произвольный ряд с областью сходимости D. По теореме 4 $\overset{\circ}{\hat{\Lambda}}_{A'} = \hat{D}^+$. Из определения Λ-плоскости следует, что внутренность барьерного конуса множества $W_{A'}$ равняется $M = \{(\mu\lambda, \mu) : \lambda \in \ln(\hat{D}^+), -\mu \in \hat{R}\}$. Поляра этого множества равна $M^0 = \{(x, \xi) \in R^{n+1}$:

$$(\forall y \in M) < (x, \xi), y > \leqslant 0\} = \{(x, \xi) \in R^{n+1} : < x, \lambda > \leqslant \xi,$$

$$\lambda \in \ln(\hat{D}^+)\} = \operatorname{epi} \delta^* (\cdot \mid \ln(\hat{D}^+)) = W_A.$$

С другой стороны, как известно, [15, с. 140], поляра барьерного конуса (или его внутренности) непустого замкнутого $(n+1)$-мерного выпуклого множества $W_{A'}$ есть рецессивный конус множества $W_{A'}$. Теорема 11 доказана.

Замечание. Условие теоремы 11 наверняка выполняется, если область D ограничена. То, что множество $\ln(D^+)$ не содержит прямой, существенно для справедливости теоремы, хотя не является необходимым условием. В самом деле, пусть $\ln(\hat{D}_\alpha^+) = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 + \alpha x_2 < 1\}$. Если α — иррациональное число и D_α — область сходимости ряда A, то множество W_A имеет бесконечно много вершин и не является конусом. Пусть $\alpha = p/q$ — рациональное число, $p, q \in \hat{Z}$. Положим $A_{00} = 1$, $A_k = \exp(1 - lq)$, если $k = (ql, pl)$, $l = 1, 2, \ldots$, и $A_k = 0$ для остальных $k \in Z_+^2$. Тогда область сходимости ряда $\Sigma A_k z^k$ равна D_α и $\delta_A = \{(x_1, x_2, \xi) \in R^3 : x_1 = \xi = qt, x_2 = pt, t \in R_+\}$,

$$m_A(r) = \begin{cases} 1, & r \in D_\alpha^+, \\ +\infty, & r \in \overline{R}_+^2 \setminus D_\alpha^+. \end{cases}$$

Список литературы: 19. *Гече Ф. И.* Диаграмма Ньютона и ее применение к изучению максимального члена кратного ряда Лорана. II. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1978, вып. 31. 20. *Weyl H.* Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. — Mathem. Annalen, 1916, Bd77, S. 313—352. 21. *Kronecker L.* Die Periodensysteme von Funktionen reeller Variablen. — Berichte d. K. Preuß. Ak. d. W. zu Berlin, 1884, S. 1071—1080. 22. *Касселс Дж. В. С.* Введение в теорию диофантовых приближений. М., Изд-во иностр. лит., 1961. 183 с. 23. *Владимиров В. С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М., Наука, 1964. 410 с.

Поступила 28 января 1974 г.