УДК 517.4

А. Л. ФИГОТИН

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРИ БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ НЕКОТОРЫХ ВИНЕРОВСКИХ ИНТЕГРАЛОВ. II

В первой части данной работы рассматривались винеровские интегралы $K(t)$, которые, сохраняя обозначения, принятые в упомянутой части, можно записать в виде

$$K(t) = E_x M\left\{\exp\left[-\int_0^t q(x(\tau))\,d\tau\right]\right\}. \tag{1}$$

Указанное выражение было исследовано для случайных полей $q(x)$, которые можно представить в виде

$$q(x) = \int_{R^d} v(x-y)\,m(dy), \tag{2}$$

где $m(dy)$ — случайная мера, удовлетворяющая условиям B_1—B_3 и либо B_4 или B_4', которые сформулированы в предыдущей части, а $v(x)$ — неотрицательная функция, убывающая быстрее, чем $|x|^{-d-2}$ при $|x| \to \infty$. В описании асимптотического поведения выражения (1) большую роль играла функция $f(t) = -\ln M\{\exp[-tm(C)]\}$, где C — единичный куб в R^d.

Ниже исследовано асимптотическое поведение $K(t)$, когда $m(dy)$ удовлетворяет условиям B_1 — B_4, а $v(x)$ — условиям, сформулированным в следующих теоремах.

Теорема 2. *Пусть* $v(x)$ *такова, что* $v \geqslant 0$, $v(x) \sim c_0 |x|^{-\alpha} \times (|x| \to \infty)$, $d < \alpha < d+2$, $\|v\|_1 < \infty$. *Тогда если существует* γ *такое, что* $0 < \gamma < d/\alpha$, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)\,t^{-\gamma} = 0$, *то*

$$\ln K(t) \sim -(c_0 t)^{d/\alpha} \frac{S_d}{\alpha}\int_0^\infty f(\tau)\,\tau^{-\frac{d}{\alpha}-1}\,d\tau,\ t\to\infty.$$

Доказательство этой теоремы в основном повторяет доказательство соответствующего утверждения в [1] с использованием асимптотической формулы

$$\int\limits_{R^d} f(tv(x))\,dx \sim (c_0 t)^{\frac{d}{\alpha}} \frac{S_d}{\alpha} \int\limits_0^\infty f(\tau)\,\tau^{-\frac{d}{\alpha}-1} d\tau, \ t \to \infty.$$

Теорема 3. *Пусть* $v(x)$ *удовлетворяет условиям*: $v(0) \leqslant v(v) \leqslant 0$, $v \in C^2(R^d)$, $\|v\|_1 < \infty$, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta: 0 < \delta < 1 \ \inf\limits_{|x| \geqslant \varepsilon} v(x) > (1-\delta) v(0)$. *Тогда если функция* $f(t)$ *определена на интервале* $(-\infty; +\infty)$ *и* $\ln[-f(-t)] = \gamma t^\alpha + 0(1)$ $(t \to \infty;\ \gamma,\ \alpha > 0)$, *то*

$$\ln K(t) \sim \left(\frac{2\pi}{\alpha\gamma}\right)^{\frac{d}{2}} D^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{\alpha d}{2}} \exp[\gamma t^\alpha |v(0)|^\alpha], \ t \to \infty,$$

где

$$D = \det B, \ B = \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right\} \ (1 \leqslant i, \ j \leqslant d).$$

Асимптотическое поведение $\ln K(t)$ в данном случае совпадает с асимтотическим поведением выражения $-\int\limits_{R^d} f(t(v(x))\,dx$. Этот факт является следствием утверждений, отличающихся от соответствующих рассуждений из [1] заменой $1 - e^{-t}$ на $f(t)$. Разбивая последний интеграл на две части, соответствующие областям $|x| \geqslant \varepsilon$ и $|x| \leqslant \varepsilon$, легко получить требуемую асимптотику.

Используя доказанные теоремы, можно определить асимптотическое поведение нормированных функций распределения собственных значений случайных операторов Шредингера $-\frac{1}{2}\Delta + q(x)$ $(x \in R^d)$ в окрестности нижней границы спектра этих операторов.

Пусть $q(x)$ — случайное поле вида (2), удовлетворяющее условиям теоремы 1 из первой части данной работы. Рассмотрим случайный оператор H_V, определенный операцией $-\frac{1}{2}\Delta + q(x)$ в кубе V и некоторыми самосопряженными условиями границе V. Определим нормированные функции распределения собственных значений $N_V(\lambda)$, так что $VN_V(\lambda)$ — число собственных значений H_V, меньших λ. Известно [2], что при указанных условиях существует неслучайная функция $N(\lambda)$ такая, что с вероятностью 1 $\lim\limits_{V \to \infty} N_V(\lambda) = N(\lambda)$ в точках непрерывности $N(\lambda)$ и $k(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t} dN(\lambda) = M\{K(t;\ 0;\ 0)\}$, где $K(t;\ x;\ y)$ — ядро оператора $\exp\left\{-t\left[-\frac{1}{2}\Delta + q(x)\right]\right\}$. Следовательно [3], $k(t) =$

$= (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} M E_0 \left\{ \exp\left[-\int\limits_0^t (x(\tau))\, d\tau \right] \middle| x(t) = 0 \right\}$. Из тауберовых теорем [4] следует $\ln N(\lambda) \sim \min\limits_{t>0} \{\lambda t + \ln k(t)\}$, $\lambda \to +0$. Поэтому определение асимптотического поведения $\ln N(\lambda)$ при $\lambda \to +0$ сводится к нахождению асимптотики $\ln k(t)$ при $t \to \infty$. Действительно, согласно [5] оценка снизу для $\eta(t) t^{-1} \ln k(t)$ отличается от соответствующей оценки для $\eta(t) t^{-1} \ln K(t)$ заменой $\|\sqrt{\varphi}\|_\infty$ на $\|\sqrt{\varphi}\|_1$, т. е. $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) t^{-1} \ln k(t) \geqslant -\inf\limits_{\varphi\in F} \{ I(\varphi) + \int\limits_{R^d} \beta(a\varphi(x))\, dx\}$. Пусть $p_t(x)$ $(x \in R^d)$ — плотность распределения Гаусса в R^d с дисперсией t. Тогда, во-первых, ввиду $q(x) \geqslant 0$

$$E_0 \left\{ \exp\left[-\int\limits_0^t q(x(\tau))\, d\tau \right] \middle| x(t) = 0 \right\} \leqslant E_0 \left\{ \exp\left[-\int\limits_0^{t-\varepsilon} q(x(\tau))\, d\tau \right] \middle| \times \right.$$

$$\left. \times\, x(t) = 0 \right\} = \int\limits_{R^d} E_0 \left\{ \exp\left[-\int\limits_0^{t-\varepsilon} q(x(\tau))\, d\tau \right] \middle| x(t-\varepsilon) = y \right\} p_{t-\varepsilon}(y) \times$$

$$\times\, p_\varepsilon(y)\, dy / p_t(0) \leqslant (t/\varepsilon)^{\frac{d}{2}} E_0 \left\{ \exp\left[-\int\limits_0^{t-\varepsilon} q(x(\tau))\, d\tau \right] \right\}, \ (\varepsilon > 0).$$

Во-вторых, имеет место

Лемма. $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\eta(t) \ln t}{t} = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\eta(t-\varepsilon)}{\eta(t)} = 1$, $(\varepsilon > 0)$. Представив $\eta(t) t^{-1}$ в виде

$$\left[t\eta(t)^{-\frac{d+2}{2}} \right]^{-\frac{2}{d+2}} t^{-\frac{d}{d+2}}$$

и воспользовавшись свойствами функции $\eta(t)$, немедленно получим первый предел леммы. Справедливость второго предельного равенства следует из неравенств $1 \geqslant \eta(t-\varepsilon)/\eta(t) \geqslant [(t - \varepsilon)/t]^{\frac{2}{d+2}}$, которые легко получить, пользуясь свойствами функций $\eta(t)$ и $f(t)$. Из неравенств (3) и леммы следует, что $\ln k(t) \leqslant [1 + o(1)] \ln K(t)$, $t \to \infty$, т. е. $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, \eta(t)\, t^{-1} \ln k(t) \leqslant -\inf\limits_{\varphi\in F} \times \{I(\varphi) + \int\limits_{R^d} \beta(a\varphi(x))\, dx\}$. Таким образом доказано, что $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) \times t^{-1} \ln k(t) = -\inf\limits_{\varphi\in F} \{I(\varphi) + \int\limits_{R^d} \beta(a\varphi(x))\, dx\} = -\varkappa$. Тогда нетрудно видеть, что

$$\ln N(\lambda) = \min_{t>0} \left\{ t\lambda - \varkappa \frac{t}{\eta(t)} \right\} [1 + o(1)], \ \lambda \to +0.$$

Так для пуассоновских случайных мер и мер, порождаемых гамма-распределениями, последняя формула даст соответственно

$$\ln N(\lambda) \sim -c\gamma_d^{\frac{d}{2}} \lambda^{-\frac{d}{2}}, \quad \lambda \to +0, \qquad \ln N(\lambda) \sim -\gamma_d^{\frac{d}{2}} \ln \lambda^{-1}, \quad \lambda \to +0,$$

где γ_d — наименьшее собственное значение задачи Дирихле в d-мерном шаре.

Для случайных полей $q(x)$ из теорем 2, 3 соотношение $\ln k(t) \sim \ln K(t)$ легко обосновывается. Асимптотическое поведение $\ln N(\lambda)$ для этих случайных полей имеет вид соответственно

$$\ln N(\lambda) \sim -(ab)^{\frac{1}{b-1}}(b^{-1}-1)\lambda^{-\frac{b}{1-b}},\ \lambda \to +0,\ \text{где } b=\frac{d}{\alpha},\ a=c_0^b\times \times \frac{S_d}{\alpha}\int_0^\infty f(\tau)\tau^{-b-1}d\tau;\quad \ln N(\lambda) \sim \frac{\lambda}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}|v(0)|}\ln^{\frac{1}{\alpha}}(-\lambda),\ \lambda\to-\infty.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность Л. А. Пастуру и Д. Х. Хаджиеву за постоянный интерес к работе и полезные обсуждения.

Список литературы: 1. *Пастур Л. А.* Об асимптотическом поведении при больших временах некоторых винеровских интегралов.— Теорет. и мат. физика, 1977, т. 32, № 2, с. 88—95. 2. *Пастур Л. А.* Спектры случайных самосопряженных операторов.— Усп. мат. наук, т. 28, вып. 3. с. 3—64. 3. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. М., Мир, 1965. 408 с. 4. *Виденский В. С.* Целые трансцендентные функции и их применение к исследованию N-функций. Мат. сборник. 1963, т. 62, с. 121—139. 5. *Пастур Л. А.* О распределении собственных значений уравнений Шредингера со случайным потенциалом.— Сб. трудов ФТИНТ АН УССР. Мат. физика и функцион. анализ, 1974, вып. 5, с. 141—145.

Поступила 20 мая 1978 г.