УДК 517.535.2

С. Д. БРОНЗА, В. Г. ТАИРОВА

ПРОФИЛИ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рассматриваем способ изображения римановых поверхностей, позволяющий описывать не только римановы поверхности класса F_q (с помощью комплексов отрезков [1, с. 456]), но и римановы поверхности более широкого класса, например, замкнутые римановы поверхности положительного рода.

Рассмотрим класс римановых поверхностей, имеющих такую же структуру, как и римановы поверхности из описанного в [1, гл. VII, § 4] класса F_q, но без требования односвязности. Этот класс римановых поверхностей обозначим F_q^*. Пусть $R \in F_q^*$ и $D = \{a_i\}_{i=1}^q$ — множество базисных точек римановой поверхности R. Без ограничения общности можно считать, что D состоит из конечных точек. Каждую точку $a_i \in D$ снабдим ε_i-окрестностью, при этом будем полагать, что замыкания этих окрестностей не пересекаются. На границе каждой ε_i-окрестности выберем по точке b_i и через точки множества $\Delta = \{b_i\}_{i=1}^{q}$ проведем замкнутую жорданову кривую Λ так, чтобы ε_i-окрестности базисных точек лежали во внешности кривой Λ. Не уменьшая общности, можно считать, что точки множества Δ располагаются на Λ, при обходе ее в положительном направлении, в порядке возрастания индексов, $b_{q+1} = b_q$. Часть кривой, расположенную между точками b_i и b_{i+1}, будем обозначать Λ_i, внешность кривой Λ — Z^*, а внутренность — Z^0 (см. рис. 1).

Рассмотрим кривую $K = \Lambda \cup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{q} \partial\varepsilon_i\right)$, где $\partial\varepsilon_i$ — положительно ориентированная граница ε_i-окрестности точки a^i. Прообраз G кривой K на римановой поверхности R, относительно операции π проектирования ее на $\overline{C}$, можно рассматривать как граф, множеством вершин которого является прообраз множества точек Δ, множеством ребер — прообраз множества $\{\Lambda_i\}_{i=1}^{q}$. Прообразы границ ε_i-окрестностей составляют множество дуг (ориентированных ребер) графа G[1]. Легко видеть, что граф G, кроме вершин, не имеет других точек самопересечения, каждой вершине графа инцидентны две дуги[2] и два ребра, т. е. граф G — частично ориентированный, связный, топологический, однородный степени 4.

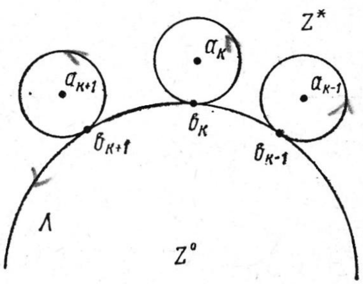

Рис. 1.

Элементарный цикл графа G, являющийся краем грани, образом которой есть Z^0, назовем α-циклом. Очевидно, два различных α-цикла не имеют общих вершин. Множество α-циклов графа G равномощно множеству внутренних (или внешних) полулистов римановой поверхности R, которой соответствует граф. Перенумеруем α-циклы и их упорядоченную совокупность обозначим через $\{\alpha_j\}_{j\in J}$, где J — конечное или счетное множество индексов. Точке ветвления (алгебраической или логарифмической) порядка $\lambda\,(\lambda \leqslant \infty)$, расположенной над базисной точкой a_i, соответствует или элементарный контур графа G длины $\lambda + 1$[3] (когда $\lambda < \infty$), или бесконечный элементарный путь (когда $\lambda = \infty$), вершинами которых являются прообразы точки b_i на римановой

---

[1] Здесь и в дальнейшем используем терминологию теории графов, принятую, например, в [2].

[2] Петля графа G рассматривается как две дуги — входящая и исходящая.

[3] Длина пути понимается в смысле теории графов, см. [2, с. 13]. Петлю рассматриваем как контур длины [1].

поверхности R. Такие контуры и пути назовем μ-контурами и μ-путями.

Совокупность μ-контуров и μ-путей графа G, соответствующих всем точкам римановой поверхности R, лежащим над базисной точкой a_i, обозначим через $\{\mu\}_{a_i}$.

Придадим графу G другой вид. Отметим, что каждая вершина графа G одновременно принадлежит одному и только одному α-циклу и одной и только одной совокупности $\{\mu\}_{a_i}$. Поэтому каждой вершине графа G можно сопоставить упорядоченную пару чисел (i, j), где i указывает на принадлежность вершины множеству $\{\mu\}_{a_i}$, а j — на ее принадлежность α_j-циклу. Далее, множеству α-циклов $\{\alpha_j\}_{j\in J}$ поставим в соответствие множество P прямых, параллельных прямой p; множеству $\{b_i\}_{i=1}^{q}$ — множество $\{p_i\}_{i=1}^{q}$ точек прямой p, расположив его на p в порядке возрастания индексов. Паре (i, j) поставим в соответствие точку прямой из множества P, соответствующей α_j-циклу, ортогонально проектирующуюся в точку p_i. Для этой точки сохраним обозначение (i, j). Полученное множество точек рассмотрим как совокупность вершин графа П; смежность вершин графа П определяется смежностью соответствующих им вершин графа G. Очевидно, что в графе П вершины вида (i, j) $(i+1, j)$ связаны ребрами, и для любой вершины (i, j) найдется вершина графа П (i, k) такая, что обе эти вершины инцидентны одной дуге графа П, если $j=k$, мы имеем петлю графа П. Граф П назовем профилем римановой поверхности R (в дальнейшем точки p_i обозначим через a_i). На рис. 2 приведены примеры профилей римановой поверхности рода 1 с четырьмя базисными точками и римановой поверхности Arc sin w.

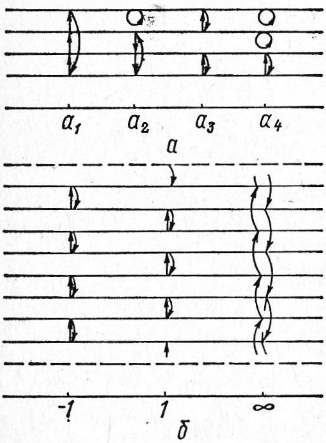

Рис. 2.

Пусть П′ — связанный, однородный степени 4, частично ориентированный граф, каждая вершина которого инцидентна двум дугам и двум ребрам (петля рассматривается как две дуги). И пусть граф П′ имеет изображение, при котором его вершины расположены на конечном или счетном множестве P прямых, параллельных фиксированной прямой p, а множество ортогональных проекций вершин графа П′ на прямую p конечно, при этом, если точка $p' \in p$ — ортогональная проекция одной из вершин графа П′, то все точки множества прямых P, имеющих проекцию p', являются вершинами графа П′. (Прямые из P отметим целочисленными индексами из некоторого множества J, а проекции вершин на p снабдим индексами от 1 до q в порядке обхода p). Ребрами графа Π' служат отрезки прямых множества P, на которые они разбиваются вершинами графа Π'[1], а вершины, инцидентные одной дуге графа Π', имеют одну и ту же проекцию на прямую p. Граф Π', обладающий перечисленными выше свойствами, назовем графом типа профиля. Очевидно, что профиль римановой поверхности является графом типа профиля, но не всякий граф типа профиля, есть профиль некоторой римановой поверхности.

Выясним необходимые и достаточные условия, при которых граф типа профиля является профилем некоторой римановой поверхности класса F_q^*. Через (i, j) обозначим вершину Π', лежащую на прямой из P с индексом j и проектирующуюся в точку на p с индексом i, а через Γ — множество определенных ниже путей Π'.

Определение 1. Частично ориентированный цикл графа Π' назовем путем, если его ребра и дуги чередуются, все дуги имеют одинаковую ориентацию, при удалении петель цикл становится элементарным[2].

Вершины каждого пути $\gamma \in \Gamma$ располагаются на нем в последовательности $(1, i_0)$, $(1, i_1)$, $(2, i_1)$, $(2, i_2)$, ..., (k, i_{k-1}), (k, i_k), ..., $(q-1, i_{q-1})$, (q, i_q) $(i_k \in J,\ i_0 = i_q)$, и при обходе цикла первые индексы проходимых вершин не убывают.

Определение 2. Будем говорить, что совокупность путей образует точное покрытие графа Π', если 1) любая дуга (ребро) графа Π' принадлежит некоторому пути; 2) два различных пути не имеют общих дуг (ребер).

Теорема. *Для того чтобы граф Π' типа профиля был профилем некоторой римановой поверхности класса F_q^*, необходимо и достаточно, чтобы существовало точное покрытие графа Π'.*

Множество путей точного покрытия имеет ту же мощность, что и множество P. Поэтому в случае замкнутых n-листных римановых поверхностей с q базисными точками число путей точного покрытия у соответствующих им профилей равно n, а длина каждого пути равна $2q$. На рис. 3 изображены пути точного покрытия римановой поверхности.

Необходимость. Пусть Π-профиль римановой поверхности R. Граница любой компоненты прообраза множества

$$B = \overline{C} \setminus \left[Z^0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{q} \varepsilon_i \right) \cup K \right]$$

при отображении $\pi: R \to C$, очевидно, удовлетворяет определению пути. Совокупность так определенных путей образует точное

[1] За одно ребро засчитываем на каждой прямой из P отрезок, содержащий бесконечно удаленную точку.

[2] Петлю, входящую в путь, рассматриваем как одну дугу.

покрытие профиля П, так как границы двух различных компонент прообразов не имеют общих ребер (дуг), и множество ребер (дуг) профиля П совпадает с множеством ребер (дуг) границы прообраза B, т. е. любое ребро (дуга) принадлежит одному пути.

Достаточность. Пусть граф П′ обладаем точным покрытием. Достаточность условий теоремы докажем, если мы графу П′ поставим в биективное соответствие риманову поверхность $R \in F_q^*$ и покажем, что, с другой стороны, граф П′ является профилем этой римановой поверхности. Совокупность ребер графа П′, инцидентных вершинам, принадлежащим одной прямой множества

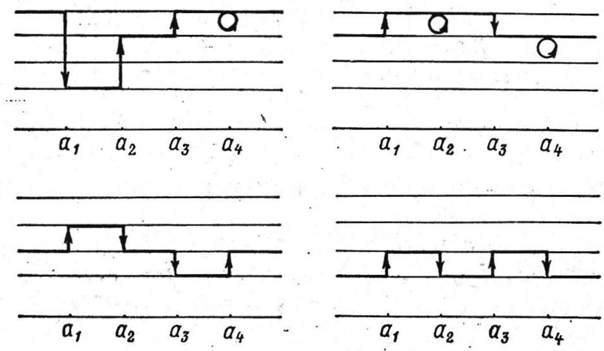

Рис. 3.

P, образует цикл графа П′. Предположим, что множество таких циклов графа П′ представлено упорядоченной совокупностью $\{\beta_j\}_{j \in J}$. Возьмем на z-плоскости замкнутую жорданову кривую L и последовательностью q точек в направлении положительного обхода разобьем ее на части L_i $(i = 1, \ldots, q)$. Внутренность кривой L обозначим через Z_0 и назовем внутренним полулистом; внешность кривой $L - Z_*$ и назовем внешним полулистом. Каждому циклу β_j, $j \in J$, графа П′ поставим в биективное соответствие один экземпляр внутреннего полулиста Z_0, а каждому пути γ из точного покрытия Г графа П′ — один экземпляр внешнего полулиста Z_*. Пусть β_{i_0} — некоторый цикл графа П′, а l — ребро этого цикла, инцидентное вершинам (i, j_0), $(i+1, j_0)$. Существует один и только один путь $\gamma_0 \in \Gamma$, имеющий с циклом β_{i_0} общее ребро l. Внутренний полулист Z_0, соответствующий циклу β_{i_0}, и внешний полулист Z_*, соответствующий пути γ_0, склеим по кривой L_i. Такое склеивание проведем относительно всех ребер всех циклов β_j, $j \in J$, графа П′. Предположим, что вершина (i, j_0), инцидентная ребру l, принадлежит контуру графа П′ длины $\lambda + 1$ $(\lambda > 0)$. Вершины такого контура инцидентны $2(\lambda + 1)$ ребрам, принадлежащим $\lambda + 1$ различному пути точного покрытия Г и $\lambda + 1$ различному циклу графа П′. Склеивая $\lambda + 1$ внутренних полулистов, соответствующих этим путям с $\lambda+1$ внешними полулистами, соответствующими этим циклам графа Π', по кривым L_i и L_{i+1}, получаем точку ветвления порядка λ (в случае, когда $\lambda=\infty$, получаем логарифмическую точку ветвления). Если же вершина (i, j_0) принадлежит петле, то инцидентные этой вершине два ребра принадлежат одному и тому же пути γ_0 точного покрытия графа Π' и одному и тому же циклу β_{i_0} графа Π'.

В этом случае по кривым L_i и L_{+1i} склеиваются один и тот же внешний полулист с одним и тем же внутренним полулистом, в результате чего точек ветвления не возникает. Очевидно, каждое ребро внутреннего полулиста склеивается с определенным ребром некоторого внешнего полулиста, и наоборот.

Произведя указанное выше склеивание, получаем некоторую риманову поверхность R, принадлежащую классу F_{∂}^{*}.

Построим теперь профиль полученной римановой поверхности. В качестве базисной кривой возьмем кривую L, кривую Λ построим так, как показано на рис. 1, Z^0 — внутренность кривой Λ, Z_0 — внутренность кривой L. Не уменьшая общности, можно считать, что $Z_c^0 Z_0$. Тогда грани графа G, образы которых при проектировании π суть Z^0, принадлежат внутренним полулистам римановой поверхности R. Поскольку краями этих граней являются α-циклы графа G и на каждом внутреннем полулисте располагается по одному α-циклу, а сами внутренние полулисты однозначно определяются β-циклами графа Π', то перенумеровав α-циклы графа G в соответствии с нумерацией β-циклов, получим профиль Π римановой поверхности, совпадающей с графом Π'. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., Наука, 1970. 456 с. 2. *Берж К.* Теория графов и ее применения. М., Изд-во иностр. лит. 1962, с. 5—40.

Поступила 25 июня 1977 г.