УДК 517.95+517.55+513.88

М. Ф. БЕССМЕРТНЫЙ

ИМПЕДАНСЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ КЛАССА Мин Най-да КАК АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ. II

В первой части [1] нашей работы мы показали, что матрица обобщенных сопротивлений $2n$-полюсника Мин Най-да с необходимостью есть матрица-функция класса P. Покажем теперь, что принадлежность классу P является и достаточным условием того, что матрица-функция $Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)$ есть матрица обобщенных импедансов $2n$-полюсника Мин Най-да, т. е. построим конкретный $2n$-полюсник по заданной матрице-функции класса P. Для этого нам понадобится класс матриц-функций одного комплексного переменного, аналогичный классу P.

Назовем дробно-рациональную квадратную матрицу-функцию комплексного переменного λ реактансной, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$1.\ Z^*(\lambda)+Z(\lambda)\geqslant 0\ (\operatorname{Re}\lambda>0);\ 2.\ Z^*(\lambda)+Z(\lambda)=0\ (\operatorname{Re}\lambda=0);$$
$$3.\ Z(\bar{\lambda})\equiv\overline{Z(\lambda)};\ 4.\ Z'(\lambda)\equiv Z(\lambda).$$

В теории линейных электрических цепей матрицы-функции этого класса хорошо известны [2, 4]. Класс реактансных матриц-функций адекватен классу «чисто реактивных» $2n$-полюсников, т. е. $2n$-полюсников с идеальными катушками и конденсаторами (и, конечно же, идеальными трансформаторами). Реактансные матрицы-функции имеют достаточно простую структуру, а именно: для того чтобы $Z(\lambda)$ была реактансной, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде:

$$Z(\lambda) = A_\infty \cdot \lambda + \frac{A_0}{\lambda^\varepsilon} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} \frac{2A_k \cdot \lambda}{\lambda^2 + \tau_k^2},$$

где A_k — вещественные неотрицательные постоянные матрицы (вычеты в полюсах $i\tau_k$, 0, ∞), τ_k — вещественные числа.

Существенную роль при построении конкретного $2n$-полюсника по заданному импедансу будет играть следующее утверждение.

Теорема 2. *Для того, чтобы матрица-функция $Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)$ принадлежала классу P, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид*

$$Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = A_\infty \cdot \lambda^\mu + \frac{A_0}{\lambda^\varepsilon} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} \frac{2A_k \cdot \lambda^\mu}{\lambda^\mu \cdot \lambda^\varepsilon + \tau_k^2},$$

где A_k — вещественные неотрицательные постоянные матрицы, а τ_k — вещественные числа.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $Z(\lambda^\mu, \lambda_\varepsilon) \in P$. Рассмотрим при некотором вещественном $\Theta > 0$ матрицу-функцию

$$q_\Theta(\lambda) = Z\left(\lambda, \frac{\Theta}{\lambda}\right).$$

Из определения класса P следует, что $q_\Theta(\lambda)$ — реактансная и, кроме того, удовлетворяет условию $i\,[\overset{*}{q}_\Theta(\lambda) - q_\Theta(\lambda)] \geqslant 0$ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$.

Таким образом, $q_\Theta(\lambda)$ может иметь единственную особенность — полюс первого порядка при $\lambda = \infty$: $q_\Theta(\lambda) = A(\Theta) \cdot \lambda$. Здесь $A(\Theta)$ — вычет $q_\Theta(\lambda)$ при $\lambda = \infty$.

Очевидно, что $A(\Theta)$ — дробно-рациональная матрица-функция от Θ. Так как из равенства двух дробно-рациональных функций на отрезке вещественной оси следует их равенство всюду в области определения, то для любых комплексных Θ, за исключением конечного числа точек, имеем:

$$Z\left(\lambda, \frac{\Theta}{\lambda}\right) = q_\Theta(\lambda) = A(\Theta) \cdot \lambda.$$

Полагая $\lambda = \lambda^\mu$, $\Theta = \lambda^\mu \cdot \lambda^\varepsilon$, находим $Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = A(\lambda^\mu \cdot \lambda^\varepsilon) \cdot \lambda^\mu$. Учитывая, что $Z(\lambda, \lambda)$ — реактансная, без труда получаем:

$$A(\lambda^2) = \frac{1}{\lambda} Z(\lambda, \lambda) = \frac{A_0}{\lambda^2} + A_\infty + \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} \frac{2A_k}{\lambda^2 + \tau_k^2},$$

откуда

$$Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = A_\infty \cdot \lambda^\mu + \frac{A_0}{\lambda^\varepsilon} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} \frac{2A_k \cdot \lambda^\mu}{\lambda^\mu \cdot \lambda^\varepsilon + \tau_k^2}.$$

Достаточность очевидна, если учесть, что все A_k — вещественные и неотрицательные матрицы, τ_k — вещественные числа, и преобразовать предыдущую формулу к виду

$$Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = A_\infty \cdot \lambda^\mu + \frac{A_0}{\lambda^\varepsilon} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} \frac{2A_k}{\lambda^\varepsilon + \tau_k^2/\lambda^\mu}.$$

Прежде чем перейти к конструированию конкретного $2n$-полюсника по заданной матрице-функции класса P, рассмотрим одно вспомогательное преобразование над $2n$-полюсниками.

Пусть некоторый $2n$-полюсник имеет в качестве матрицы обобщенных импедансов матрицу $Z_0(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)$: $\vec{U}(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = Z_0(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) \cdot \vec{I}_0(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)$.

Подключим к нему идеальный $2\times 2n$-трансформатор с матрицей T:

$$\left[\frac{\vec{U}_1(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)}{\vec{I}_1(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)}\right] = \left[\begin{array}{c|c} t' & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{array}\right] \cdot \left[\frac{\vec{U}_0(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)}{\vec{I}_0(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)}\right].$$

Из цепочки равенств $\vec{U}_1(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = t' \cdot \vec{U}_0(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = t' \cdot Z_0(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) \cdot \vec{I}_0(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = t' \cdot Z_0(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) \times \times t \cdot \vec{I}_0(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)$ заключаем, что $Z_1(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = t' \cdot Z_0(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) \cdot t$.

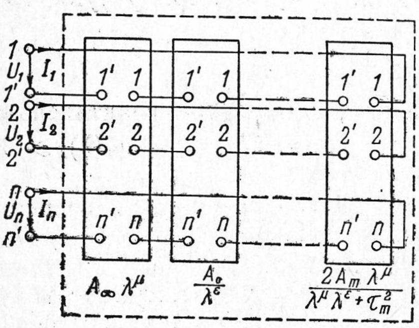

Рис. 1.

Два $2n$-полюсника, матрицы обобщенных импедансов которых связаны таким соотношением с неособенной вещественной матрицей t, естественно назвать подобными.

Покажем теперь, что свойства 1—5 определения матрицы-функции класса P являются характеристическими для матрицы обобщенных сопротивлений.

Теорема 1. [1]. *Для того чтобы матрица-функция $Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)$ была матрицей обобщенных импедансов $2n$-полюсника Мин Найда, необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала классу P.*

Доказательство. В силу ранее сказанного [1], в доказательстве нуждается лишь достаточность.

Пусть $Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) \in P$. Согласно теореме 2,

$$Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = A_\infty \cdot \lambda^\mu + \frac{A_0}{\lambda^\varepsilon} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} \frac{2A_k \cdot \lambda^\mu}{\lambda^\mu \lambda^\varepsilon + \tau_k^2}.$$

Предположим, что мы реализовали каждое слагаемое этой суммы в виде матрицы обобщенных импедансов некоторого $2n$-полюсника. Нетрудно видеть, что тогда $Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)$ реализуется в виде матрицы обобщенных импедансов $2n$-полюсника, изображенного на рис. 1.

Рассмотрим подробно реализацию каждого слагаемого.

Так как матрицы A_k — вещественные и неотрицательные, то существуют вещественные неособенные матрицы t_k, такие, что матрицы $B_k = t_k'^{-1} \cdot A_k \cdot t_k^{-1}$ диагональны, т. е.

$$B_k = \begin{vmatrix} \nu_1^{(k)} & & & 0 \\ & \nu_2^{(k)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \nu_n^{(k)} \end{vmatrix},$$

где $\nu_j^{(k)} \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — собственные значения матрицы A_k. Теперь для реализации слагаемого

$$Z_k(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = \frac{2A_k \cdot \lambda^\mu}{\lambda^\mu \cdot \lambda^\varepsilon + \tau_k^2}$$

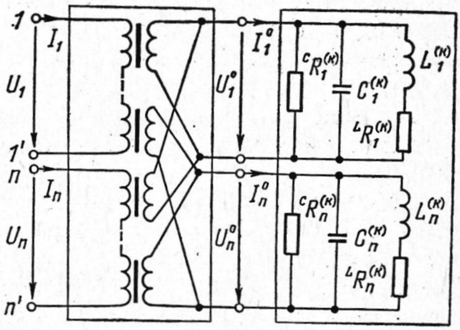

Рис. 2.

достаточно реализовать матрицу

$$Z_k^0(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = \begin{vmatrix} \dfrac{2\nu_1^{(k)} \cdot \lambda^\mu}{\lambda^\mu \cdot \lambda^\varepsilon + \tau_k^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \dfrac{2\nu_n^{(k)} \cdot \lambda^\mu}{\lambda^\mu \cdot \lambda^\varepsilon + \tau_k^2} \end{vmatrix}$$

в виде матрицы обобщенных импедансов $2n$-полюсника. Искомый $2n$-полюсник получится преобразованием подобия. Соответствующий идеальный $2\times 2n$-трансформатор имеет матрицу

$$T_k = \left[\begin{array}{c|c} t_k' & 0 \\ \hline 0 & t_k^{-1} \end{array} \right].$$

Реализация матрицы $Z_k(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = \dfrac{2A_k \cdot \lambda^\mu}{\lambda^\mu \cdot \lambda^\varepsilon + \tau_k^2}$ показана на рис. 2.

Параметры элементов определяются следующим образом:

$$L_j^{(k)} = \frac{2\nu_j^{(k)}}{\tau_k^2}, \quad C_j^{(k)} = \frac{1}{2\nu_j^{(k)}},$$

$${}^LR_j^{(k)} = k_\mu \cdot L_j^{(k)}, \quad {}^CR_j^{(k)} = \frac{1}{k_\varepsilon \cdot C_j^{(k)}}.$$

Если при некотором j, $\nu_j^{(k)} = 0$, соответствующие зажимы идеального $2\times 2n$-трансформатора должны быть замкнуты накоротко.

Аналогично реализуются слагаемые $A_{\infty}\cdot\lambda_{\mu}$, $\frac{A_0}{\lambda^{\varepsilon}}$, первое — с помощью катушек индуктивности, а второе — с помощью конденсаторов. Теорема доказана.

Таким образом, если имеется произвольный $2n$-полюсник с элементами типа (1)—(3), то всегда существует канонический $2n$-полюсник, имеющий ту же матрицу обобщенных импедансов. Переход к обычной матрице импедансов осуществляется заменой $\lambda^{\mu}=\lambda+k_{\mu}$, $\lambda^{\varepsilon}=\lambda+k_{\varepsilon}$, где k_{μ} и k_{ε} — коэффициенты «качеств» катушек индуктивности и конденсаторов соответственно.

Так как переменная λ^{μ} «жестко» связана с катушками индуктивности, а переменная λ^{ε} — с конденсаторами, то из теоремы II получаем

Следствие. *Пусть два $2n$-полюсника с элементами типа* (1)$\div$(3) *при некоторых фиксированных k_{μ} и k_{ε} имеют одну и ту же матрицу импедансов. Тогда их матрицы импедансов $Z_1(k_{\mu}, k_{\varepsilon}; \lambda)$ и $Z_2(k_{\mu}, k_{\varepsilon}; \lambda)$ будут совпадать при любых «качествах» k_{μ} и k_{ε}, входящих в их состав элементов.*

Список литературы: **1.** *Бессмертный М. Ф.* Импедансы электрических цепей класса Мин Най-да как аналитические функции двух комплексных переменных.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Харьков, 1979, вып. 32, с. 7. **2.** *Ефимов А. В., Потапов В. П.* Z-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей.—Усп. мат. наук, 1973, т. 28, № 1, с. 75—130. **3.** *Атабеков Г. И.* Теория линейных электрических цепей. М., Сов. радио, 1960. 200 с. **4.** *Карни Ш.* Теория цепей. Анализ и синтез. М., Связь, 1973. 368 с. **5.** *Сешу С., Рид М. Б.* Линейные графы и электрические цепи. М., Высшая школа, 1971. 448 с.

Поступила 28 декабря 1978 г.