УДК 517.9+513.88

Л. В. БЕРЛЯНД

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ЕДИНИЦЫ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

При нахождении асимптотического поведения решений первой краевой задачи в областях с мелкозернистой границей для эволюционных уравнений используется следующая теорема (см. [2]).

Пусть A_n — последовательность самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве H, сильно сходящихся к самосопряженному оператору A. Если $E_{n\lambda}$ и E_λ — соответствующие разложения единицы, то $\lim\limits_{n\to\infty}\|(E_{n\lambda}-E_\lambda)f\|=0$, где λ — любая точка, не принадлежащая дискретному спектру оператора A, f — произвольный элемент пространства H.

При решении аналогичных вопросов для второй краевой задачи эту теорему использовать уже нельзя.

В настоящей работе дается необходимое обобщение этой теоремы (теорема 1). Полученные результаты применяются для нахождения асимптотического поведения решения второй краевой задачи для волнового уравнения при условии, что известна асимптотика решений соответствующей задачи для стационарного уравнения (теорема 2).

Теорема 1. *Пусть H — гильбертово пространство, Q_n — последовательность проекторов в нем, A_n — последовательность ограниченных самосопряженных операторов в H, A — ограниченный оператор, который самосопряжен, вообще говоря, относительно другого скалярного произведения, порождающего эквивалентную норму в H; A, A_n, Q_n удовлетворяют условиям*

$$Q_nA_n=A_nQ_n,\ \|A_n\|\leqslant 1,\ \|A\|\leqslant 1. \tag{1}$$

Тогда, если

$$\lim_{n\to\infty}\|Q_n(A_n-A)f\|=0, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|Q_n(E_{n\lambda}-E_\lambda)f\|=0 \tag{3}$$

для любого λ, не принадлежащего дискретному спектру A, f — произвольный элемент пространства H.

Доказательство. Из (2) следует, что для любого полинома $P(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\|Q_n(P(A_n)-P(A))f\|=0. \tag{4}$$

По теореме Вейерштрасса для любой непрерывной функции $u(x)$ существует $P_k(x)$ — последовательность полиномов таких, что

$\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{|x|<1}|u(x)-P_k(x)|=0$. Поэтому $\|Q_n(u(A_n)-u(A))f\|\leqslant \leqslant\|Q_n(u(A_n)-P_k(A_n))f\|+\|Q_n(u(A)-P_k(A))f\|+\|Q_n(P_k\times \times(A_n)-P_k(A))f\|$. Здесь третье слагаемое стремится к нулю в силу (4), а первые два стремятся к нулю в силу того, что если A_n — последовательность самосопряженных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H, причем $\|A_n\|\leqslant C$, то для любой непрерывной функции $u(x)$ $\|u(A_n)f\|\leqslant\max\limits_{|x|\leqslant C}\times \times|u(x)|\,\|f\|$.

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\|Q_n(u(A_n)-u(A))f\|=0. \tag{5}$$

Положим $u(x)=e_\lambda(x)(x-\lambda)$, где

$$e_\lambda(x)=\begin{cases}1\,(-1\leqslant x\leqslant\lambda),\\ 0\,(\lambda<x\leqslant 1).\end{cases}$$

Очевидно, что $u(x)$ — непрерывная функция и для любого самосопряженного оператора B (см. [2]), $E_\lambda=e_\lambda(B)$.

Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\|Q_n(E_{n\lambda}-E_\lambda)(A-\lambda I)f\|=0. \tag{6}$$

Действительно, так как $Q_nA_n=A_nQ_n$, $E_{n\lambda}Q_n=Q_nE_{n\lambda}$, поэтому $\|Q_n(E_{n\lambda}(A-\lambda I)-E_\lambda(A-\lambda I))f\|\leqslant\|Q_n(E_{n\lambda}(A_n-\lambda I)-E_\lambda(A-\lambda I))f\|+\|Q_n(E_{n\lambda}Q_n(A-\lambda I)-E_{n\lambda}Q_n(A_n-\lambda I))f\|\leqslant\|Q_n(E_{n\lambda}\times \times(A_n-\lambda I)-E_\lambda(A-\lambda I))f\|+\|Q_n(A_n-A)f\|$. Первое слагаемое стремится к нулю в силу (5), а второе — в силу (2). Если λ не принадлежит дискретному спектру оператора A, то $(A-\lambda I)^{-1}$ также самосопряжен и $\|Q_nE_{n\lambda}f-Q_nE_\lambda f\|=\|Q_nE_{n\lambda}(A-\lambda I)(A-\lambda I)^{-1}f-Q_nE_\lambda(A-\lambda I)(A-\lambda I)^{-1}f\|$. Правая часть последнего равенства стремится к нулю в силу (6) для любого f, принадлежащего области определения оператора $(A-\lambda I)^{-1}$, которая плотна в H. Теорема доказана.

Применим доказанную теорему для нахождения асимптотического поведения решения волнового уравнения.

Пусть Ω — произвольная область в R^n, $F^{(s)}$ — замкнутое множество, содержащееся в Ω и зависящее от параметра s. С ростом параметра $F^{(s)}$ становится все более сильно изрезанным и измельченным, причем мера его остается конечной.

Рассмотрим в области $\Omega^{(s)}=\Omega/F^{(s)}$ при каждом фиксированном s краевую задачу:

$$\frac{\partial^2u^{(s)}}{\partial t^2}-\Delta u^{(s)}=0,\ x\in\Omega^{(s)},\ (t>0), \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u^{(s)}}{\partial n}\right|_{F^{(s)}}=0,\quad (t\geqslant 0), \tag{8}$$

$$u^{(s)}\big|_{\partial\Omega}=0,\quad (t\geqslant 0), \tag{9}$$

$$u^{(s)}(x, 0) = \varphi(x), \; x \in \Omega^{(s)}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial u^{(s)}}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \; x \in \Omega^{(s)}, \tag{11}$$

где $x \in R^n$, $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к границе области $\Omega^{(s)}$. Если область Ω неограничена, то предполагается, что (9) содержит условие стремления к нулю на бесконечности.

Оказывается, что при некоторых довольно общих предположениях, которые подробно сформулированы в [1], $u^{(s)}(x, t)$ сходятся в указанном ниже смысле к функции $u(x, t)$, являющейся решением следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{b(x)} \sum_{i,\ k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \quad x \in \Omega \;\; (t > 0) \tag{12}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (t \geqslant 0), \tag{13}$$

$$u(x, 0) = b(x)\varphi(x), \; \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = b(x)\psi(x), \; x \in \Omega, \tag{14}$$

где функции $b(x)$, $a_{ik}(x)$ выражаются через определенные характеристики множеств $F^{(s)}$, причем $b(x) > 0$, а тензор $a_{ik}(x)$ положительно определен.

Предположим, что последовательность областей $\Omega^{(s)}$ удовлетворяет условию: для любой функции $v^{(s)}(x) \in W_2^1(\Omega^{(s)})$ существует продолжение $\widetilde{v}^{(s)}(x) \in W_2^1(R^n)$ на все R^n такое, что $\widetilde{v}^{(s)} \times$ $\times (x) = v^{(s)}(x)$ при $x \in \Omega^{(s)}$ и

$$\| v^{(s)} \|_{W_2^1(R^n)} \leqslant C \| v^{(s)} \|_{W_2^1(\Omega^{(s)})},$$

где C не зависит от s. В этом случае будем говорить, что последовательность $\Omega^{(s)}$ удовлетворяет условию сильной связанности, которое введено в [1].

Пусть $K^0 = K(x^0, h)$ — куб с центром в точке $x^0 \in R^n$ и ребрами длины $h > 0$, ориентированными по координатным осям, а l — единичный вектор в R^n.

Рассмотрим величину

$$T_l(s, h, x^0) = \inf_{v^{(s)}} \int_{K^0 \cap \Omega^{(s)}} \{ | \nabla v^{(s)} |^2 + h^{-2-\tau} | v^{(s)} - (x - x^0) |^2 \} \, dx,$$

где

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}, \;\; \tau > 0,$$

скобками обозначено скалярное произведение в R^n, а нижняя грань берется в классе функций $v^{(s)} \in W_2^1(K^0 \cap \Omega^{(s)})$. В [1] показано, что $T_l(s, h, x^0)$ — квадратичный функционал относительно l, поэтому он представляется в виде: $T_l(s,\ h,\ x^0) = \sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik}(s,\ h,\ x^0)\, l_i l_k$. Теперь можно строго сформулировать теорему об асимптотическом поведении решения задачи (7)—(11).

Теорема 2. *Если последовательность областей $\Omega^{(s)}$ удовлетворяет условию сильной связанности и в каждой точке выполняются условия:*

1) $\lim\limits_{n\to 0} \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{\operatorname{mes}[K(x,\ h)\cap\Omega^{(s)}]}{h^n} = b(x);$

2) *для некоторого* $\tau_0 > 0$ $\lim\limits_{h\to 0} \varliminf\limits_{s\to\infty} \dfrac{a_{ik}(s,\ h,\ x)}{h^n} = \lim\limits_{h\to 0} \varlimsup\limits_{s\to\infty} \times$

$\times \dfrac{a_{ik}(s,\ h,\ x)}{h^n} = a_{ik}(x)$, *где* $b(x)$ *и* $a_{ik}(x)$ — *непрерывные функции в* Ω, *и тензор* $\{a_{ik}\}$ *положительно определен, то* $\lim\limits_{s\to\infty} \int\limits_{\Omega^{(s)}} |u^{(s)}(x,\ t) - u(x,\ t)\,\varkappa^{(s)}(x)|^2 dx = 0$. *Здесь* $\varkappa^{(s)}(x)$ — *характеристическая функция множества* $\Omega^{(s)}$.

Доказательство. Введем следующие операторы:

1. $Q^{(s)}$ — оператор вложения $L_2(\Omega)^{(s)})$ в $L_2(\Omega)$,

$$[Q^{(s)}g](x) = \begin{cases} g(x), & x\in\Omega^{(s)} \\ 0, & x\in F^{(s)} \end{cases} \quad g\in L_2(\Omega^{(s)}).$$

2. $P^{(s)}$ — оператор ограничения $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega^{(s)})$, $[P^{(s)}f](x) = f(x),\ x\in\Omega^{(s)}\ (f\in L_2(\Omega))$.

3. $\tilde{A}^{(s)} = -\Delta = -\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad D_{\tilde{A}^{(s)}} = \{u^{(s)} : u^{(s)} \in C^2(\Omega^{(s)}) \cap C^1 \times$

$\times (\bar{\Omega}^{(s)}),\ \dfrac{\partial u^{(s)}}{\partial n}\Big|_{F^{(s)}} = 0,\ u^{(s)}\Big|_{\partial\Omega} = 0\Big\}$.

4. $\tilde{A} = -\dfrac{1}{b(x)} \sum\limits_{i,\ k=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i} a_{ik}(x) \dfrac{\partial}{\partial x_k}, \quad D_{\tilde{A}} = \{u : u\in C^2(\Omega) \cap C^1 \times$

$\times (\bar{\Omega}),\ u|_{\partial\Omega} = 0\}$, операторы $\tilde{A}^{(s)}$ и $\tilde{A}$ положительно определены и симметричны в $L_2(\Omega^{(s)})$, $L_2^{b(x)}(\Omega)$ соответственно, $L_2^{b(x)}(\Omega)$ — скалярное произведение с весом $b(x)$. Поэтому можно построить их самосопряженные расширения по Фридрихсу. Эти расширения обозначим соответственно $A^{(s)}$ и A.

Предположим, что начальные данные в задачах (7)—(11) и (12)—(14) удовлетворяют условиям: $b\varphi(x),\ b\psi(x)\in D_A$; $P^{(s)}\varphi(x)$, $P^{(s)}\psi(x)\in D_{A^{(s)}}$. Тогда решение задачи (7)—(11) запишется в виде (см. [4])

$$u^{(s)}(x,\ t) = \int\limits_0^\infty \cos\sqrt{\lambda}t\, dE_\lambda^{(s)} P^{(s)}\varphi + \int\limits_0^\infty \sin\sqrt{\lambda}t \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, dE_\lambda^{(s)} P^{(s)}\psi; \quad (19)$$

решение задачи (12)—(14) имеет аналогичный вид:

$$u(x,\ t)=\int\limits_0^\infty \cos\sqrt{\lambda}t\,dE_\lambda b\varphi+\int\limits_0^\infty \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\,dE_\lambda b\psi, \tag{20}$$

где E_λ, $E_\lambda^{(s)}$ — разложение единицы операторов A, $A^{(s)}$ соответственно.

Покажем, что

$$\lim_{s\to\infty}\|Q^{(s)}P^{(s)}u^{(s)}-Q^{(s)}u\|_{L_2(\Omega)}=0. \tag{18'}$$

В работе [1] доказано, что в условиях теоремы 2

$$\lim_{s\to\infty}\|Q^{(s)}R_\lambda^{(s)}P^{(s)}f-Q^{(s)}P^{(s)}R_\lambda f\|_{L_2(\Omega)}=0. \tag{21}$$

Перепишем это условие так:

$$\lim_{s\to\infty}\|Q^{(s)}P^{(s)}(Q^{(s)}R_\lambda^{(s)}P^{(s)}-R_\lambda)f\|_{L_2(\Omega)}=0, \tag{21'}$$

где $Q^{(s)}P^{(s)}$ — последовательность проекторов, а $Q^{(s)}R_\lambda^{(s)}P^{(s)}$ — последовательность самосопряженных операторов в $L_2(\Omega)$, R_λ — самосопряжен в $L_2^{b(x)}(\Omega)$, $\|R_\lambda\|\leqslant C\Rightarrow\|Q^{(s)}R_\lambda^{(s)}P^{(s)}\|\leqslant C_1$, действительно, из (21) следует $\|Q^{(s)}R_\lambda^{(s)}P^{(s)}f\|\leqslant\|Q^{(s)}R_\lambda^{(s)}P^{(s)}f-Q^{(s)}\times\times P^{(s)}R_\lambda f\|+\|Q^{(s)}R_\lambda^{(s)}P^{(s)}f\|\leqslant C_1\|f\|$, поэтому $\|Q^{(s)}R_\lambda^{(s)}P^{(s)}\|\leqslant C_1$. Очевидно, что можно считать C, $C_1\leqslant 1$. Кроме того, ясно, что $Q^{(s)}P^{(s)}\left(Q^{(s)}R_\lambda^{(s)}P^{(s)}\right)=\left(Q^{(s)}R_\lambda^{(s)}P^{(s)}\right)Q^{(s)}P^{(s)}$.

Таким образом, выполнены условия теоремы 1, следовательно имеет место

$$\lim_{s\to\infty}\|Q^{(s)}E_\lambda^{(s)}P^{(s)}f-Q^{(s)}P^{(s)}E_\lambda f\|_{L_2(\Omega)}=0 \tag{22}$$

для любого λ, не принадлежащего дискретному спектру A.

Известно, что разложение единицы самосопряженного оператора получается из разложения единицы его резольвенты простой заменой. Поэтому (22) остается верным, если $E_\lambda^{(s)}$, E_λ разложения единицы операторов $A^{(s)}$, A. Для доказательства (18′) воспользуемся формулами (19) и (20).

Если M не принадлежит дискретному спектру оператора A, то $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}}\left\|Q^{(s)}P^{(s)}\left(\int\limits_0^M\cos\sqrt{\lambda}t\,dE_\lambda^{(s)}P^{(s)}\varphi-\int\limits_0^M\cos\sqrt{\lambda}t\,dE_\lambda\varphi\right)\right\|=0$, можно показать также, что (см. [3]) $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}}\left\|Q^{(s)}P^{(s)}\left(\int\limits_M^\infty\cos\sqrt{\lambda}t\,dE_\lambda^{(s)}\times\times P^{(s)}\varphi\right)\right\|^2\leqslant\left\|\int\limits_M^\infty dE_M\varphi\right\|^2=0\,(1)\ (M\to\infty)$. Аналогично доказывается сходимость второго слагаемого в (19). Пользуясь определениями операторов $Q^{(s)}$, $P^{(s)}$, получаем, что сходимость решения задачи (7)—(11) к решению задачи (12)—(14) имеет место в следующем смысле: $\lim\limits_{s\to\infty}\int\limits_{\Omega^{(s)}}|u^{(s)}(x)-u(x)\chi^{(s)}(x)|^2dx=0$. Теорема доказана.

С помощью теоремы 1 можно также исследовать асимптотическое поведение решения второй краевой задачи для уравнения теплопроводности в областях с мелкозернистой границей.

Автор выражает глубокую признательность Е. Я. Хруслову за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы: 1. *Хруслов Е. Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области. Мат. сб., 1978, т. 106, вып. 4, с. 604—621. 2. *Рисс Ф., Секефальви — Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М., Изд-во иностр. лит., 1954. 488 с. 3. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев. Наукова думка. 1974. 285 с. 4. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. М., Мир, 1965, с. 426—432.

Поступила 20 апреля 1978 г.