УДК 517.55 С. Ю. ФАВОРОВ

# О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Согласно определению Б. Я. Левина и П. Пфлюгера [1], целая функция $f(w)$, $w \in C$ нормального типа при уточненном порядке $\rho(t)$ называется функцией вполне регулярного роста (в. р. р.), если для всех $\varphi \in [0,2\pi[$ $\lim\limits_{t\to\infty}{}^* \frac{\ln|f(te^{i\varphi})|}{t^{\rho(t)}} = h_f(\varphi)$, где $h_f(\varphi)$ — индикатор функции $f(w)$, а * означает, что $t$ не пробегает некоторого множества $E_\varphi$ такого, что мера Лебега множества $E_\varphi \cap [O, R]$ есть $o(R)$ при $R \to \infty$.

Как было отмечено, регулярность роста целой функции эквивалентна правильному распределению множества ее корней.

Для субгармонических функций в $R^m$ близкое по характеру определение вполне регулярного роста дано В. С. Азариным [2]. Он ввел понятие правильного распределения масс и доказал, что субгармоническая функция в $R^m$ имеет в. р. р. тогда и только тогда, когда ее ассоциированная масса правильно распределена.

В работе [3], где рассматривались голоморфные функции многих переменных, в частности, доказано, что для целой функции в. р. р. $f(w)$, $w \in C$ в пространстве $D'(C)$ существует при $t \to \infty$ предел величин $t^{-\rho(t)} \ln |f(tw)|$, равный почти всюду $|w|^{\rho} h_f^{*}(\arg w)$. В. С. Азарин [4] и Агранович [5] п. 3 показали, что упомянутое выше определение субгармонической функции в. р. р. эквивалентно следующему.

Субгармоническая функция $v(x)$, $x \in R^m$, называется функцией в. р. р., если в пространстве $D'(R^m)$ существует $\lim\limits_{t \to \infty} t^{-\rho(t)} v(tx)$. Этот предел, как отмечено в [4—6], почти всюду совпадает с индикатором $h(x) = \overline{\lim\limits_{t \to \infty}}\, t^{-\rho(t)} v(tx)$.

Пусть теперь $F(z)$ — целая функция в $C^n$. Будем говорить, что $F(z)$ имеет в. р. р. в смысле (А), если субгармоническая функция $\ln |F(z)|$ имеет в. р. р. в $R^{2n}$ в смысле приведенного выше определения. Некоторые свойства функций этого класса рассматривались в [7]. Напомним, что индикатор субгармонической функции $\ln |F(z)|$ называется радиальным индикатором целой функции $F(z)$ и обозначается через $L_r(z; F)$.

Следуя Груману [8], а также [9, 10], будем говорить, что целая функция $F(z)$ имеет в. р. р. в смысле (Б), если для почти всех $z \in C^n$ функция $F(z \cdot w)$, $w \in C$, есть функция в. р. р. в плоскости переменного $w$.

Как было показано в работах [3, 5, 6], для целой функции $F(z)$, $z \in C^n$, в. р. р. в смысле (Б), в $D'(C^n)$ существует при $t \to \infty$ предел величин $t^{-\rho(t)} \ln |F(tz)|$, равный $L_r(z; F)$, и, следовательно, функция $F(z)$ является функцией в. р. р. в смысле (А).

В настоящей статье доказывается следующая

**Теорема.** *Для любого заданного* $\rho > 0$ *существует целая функция* $F(z)$ *в* $C^2$ *в. р. р. в смысле (А) при порядке* $\rho$ *такая, что для почти всех* $z \in C^2$ *функция* $F(z \cdot w)$, $w \in C$, *не является функцией в. р. р. в плоскости переменного* $w$ *и, следовательно, не является функцией в. р. р. в смысле (Б).*

Отметим, что пример субгармонической функции в. р. р. $v(x)$, $x \in R^m$, $m > 2$, для которой предел $\lim\limits_{t \to \infty}{}^{*} t^{-\rho} v(tx)$ не существует для всех $x \in R^m$, построен в [11].

*Обозначения.* Через $z = (z_1, z_2)$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ обозначим точки пространства $C^2$, при этом $|z| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$. Положим также $B(\zeta, r) = \{z \in C^2 : |z - \zeta| < r\}$, $S = \{z : |z| = 1\}$, $\Gamma = \{z \in C^2 \setminus \{0\} : \min\{|z_1||z|^{-1}, |z_2||z|^{-1}\} \geqslant \frac{1}{3}\}$. Для $z' \in C^2 \setminus \{0\}$ через $P(z', a, b)$ обозначим поликруг

$$\{z \in C^2 : z = (z_1', z_2') + \lambda (z_1', z_2') + \mu (-\bar{z}_2', \bar{z}_1'),\ \lambda,\ \mu \in C,$$
$$|\lambda| < a,\ |\mu| < b\}$$

Заметим, что линейное отображение

$$(z_1, z_2) \to (\lambda, \mu): \begin{array}{l}\lambda = |z'|^{-2}(z_1\bar{z}_1' + z_2\bar{z}_2') - 1, \\ \mu = |z'|^{-2}(z_2 z_1' - z_1 z_2')\end{array} \qquad (1)$$

переводит поликруг $P(z', a, b)$ в поликруг $\{(\lambda, \mu): |\lambda| < a, |\mu| < b\}$.

Будем считать, что множество $E \subset C^2$ есть множество нулевой относительной меры, если $m(E \cap B(0, R)) = O(R^4)$ при $R \to \infty$, где $m$ — мера Лебега в $C^2$.

Напомним, что формой Леви локально суммируемой функции $\theta(z)$ в $C^2$ называется выражение

$$\frac{\partial^2\Theta(z)}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1}|\zeta_1|^2 + 2\mathrm{Re}\frac{\partial^2\Theta(z)}{\partial z_1 \partial \bar{z}_2}\zeta_1\bar{\zeta}_2 + \frac{\partial^2\Theta(z)}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2}|\zeta_2|^2, \zeta \in C^2.$$

Известно, что непрерывная функция является плюрисубгармонической (п.-с.-г.) тогда и только тогда, когда ее форма Леви неотрицательна для всех $\zeta \in C^2$.

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

***Лемма 1.*** *Для любых* $\rho > 0$, $z' \in \Gamma$, $z \in P\left(z', \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\zeta \in C^2$ *форма Леви функции* $|z_1|^\rho + |z_2|^\rho$ *оценивается снизу величиной* $\sigma|z'|^{\rho-2}|\zeta|^2$, где $\sigma = \sigma(\rho)$ — *положительная константа.*

Доказательство леммы опускается.

***Лемма 2.*** *Для любых* $\rho > 0$, $\delta \in \left(0, \frac{1}{12}\right)$, $z' \in \Gamma$, *существуют числа* $\varepsilon = \varepsilon(\rho) > 0$, $\tau = \tau(\rho, \delta) > 0$ *и функция* $\varphi(z) = \varphi(z, z', \delta, \rho)$ *такие, что а) функция* $(1 - \varepsilon\varphi(z))(|z_1|^\rho + |z_2|^\rho)$ *п.-с.-г.* в $C^2$, *б)* $\operatorname{supp}\varphi \subset P(z', \frac{1}{8}, \delta)$, *в)* $0 \leqslant \varphi(z) \leqslant 1$ $\forall z$, *г)* $\varphi(z) = 1$ при $z \in P\left(z', \frac{1}{12}\tau\right)$.

Доказательство. Пусть $\chi(w)$ — такая функция из $C^\infty(C)$, что $\chi(w)$ при $|w| \leqslant 1$, $\chi(w) = 0$ при $|w| \geqslant \frac{3}{2}$ и $0 \leqslant \chi(w) \leqslant 1$ для всех $w \in C$. Положим $\psi(z) = \psi(z, z') = \chi(12\lambda(z; z')) \cdot \chi(12\mu(z; z'))$, где функции $\lambda(z; z')$, $\mu(z; z')$ определены соотношениями (1). При $z \in P(z', 1/8, 1/8)$ имеем $1/2\ |z'| \leqslant |z| \leqslant 2|z'|$. Поэтому для таких $z$ $\left|\frac{\partial\psi}{\partial z_i}\right| \leqslant K_1|z'|^{-1}$, $\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right| \leqslant K_2|z'|^{-2}$, $i, j = 1, 2$. Отсюда и из леммы 1 следует, что при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0(K_1, K_2, \sigma)$, где $\sigma$ — константа из леммы 1, форма Леви функции $[|z_1|^\rho + |z_2|^\rho][1 - \varepsilon\psi(z)]$ неотрицательна. Далее, положим

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, & t \geqslant \delta, \\ (t - \delta)^2, & \frac{\delta}{2} \leqslant t < \delta, \\ \frac{\delta^2}{2}\ln\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{e}t^{-1}\right), & 0 < t < \frac{\delta}{2}. \end{cases}$$

Функция $\omega(t)$ дважды дифференцируема на $]0, \infty[$, причем $\frac{\partial^2\omega(|\mu|)}{\partial\mu\partial\bar\mu} \leqslant 1$. Поэтому при $z \in P\left(z', \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ форма Леви функции $\Theta(z) = \omega(|\mu(z; z')|)$ не превосходит $|z'|^{-2}|\zeta|^2$ и, следовательно, при $z' \in \Gamma$ и $\varepsilon \leqslant \sigma$, где $\sigma$ — константа из леммы 1, функция $|z_1|^\rho + |z_2|^\rho - \varepsilon|z'|^\rho\omega(|\mu(z; z')|)$ п.-с.-г. в $P\left(z', \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$. Выберем $\tau = \tau(\rho, \delta)$ так, чтобы $|z'|^\rho\omega(\tau) \geqslant |z_1|^\rho + |z_2|^\rho$ в $P(z', 1/8, 1/8)$. Функция $\varphi(z) = \min\{\psi(z; z'); |z'|^\rho(|z_1|^\rho + |z_2|^\rho)^{-1}\omega(|\mu(z; z')|)\}$ удовлетворяет условиям б)—г). Так как максимум двух п.-с.-г. функций также п.-с.-г. функция, то условие а) выполняется при $\varepsilon \leqslant \min\{\sigma; \varepsilon_0\}$. Лемма доказана.

*Лемма 3. Пусть $\Delta(t)$ — положительная и монотонно убывающая к нулю при $t \to \infty$ функция. Существует п.-с.-г. в $C^2$ функция $\Phi(z)$ со следующими свойствами: а) $\Phi(z) \leqslant |z_1|^\rho + |z_2|^\rho$. б) множество $A_1 \overset{def}{=} \{z \in C^2 : \Phi(z) < |z_1|^\rho + |z_2|^\rho\}$ является объединением последовательности поликругов $P(z^{(n)}; 1/8; \delta_n)$; причем $|z^{(n+1)}| \geqslant 2|z^{(n)}|$ и $\Delta(|z^{(n)}|) \leqslant \delta_n \leqslant \frac{1}{12}$ для всех $n$; кроме того, $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$; в) множество $A_1$ имеет нулевую относительную меру; г) для каждого $\zeta \in S \cap \Gamma$ найдется последовательность $t' \to \infty$ такая, что при $t \in \left[t' - \frac{t'}{15}, t' + \frac{t'}{15}\right]$, $z \in B(t\zeta, 1)$, $\Phi(z) \leqslant (1 - \varepsilon)(|z_1|^\rho + |z_2|^\rho$, где $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$ — то же, что и в лемме 2.*

Доказательство. Положим $n_0 = 0$ и выберем $r_0$ так, что $r_0 \geqslant 1$ и $\Delta(r_0) \leqslant 1/62$. Пусть $\zeta^{(n)}$, $n = n_0 + 1, \ldots, n_1$ — центры шаров радиуса $1/2\tau(\rho, \Delta(r_{n_0}))$, образующих конечное покрытие компакта $S \cap \Gamma$, где $\tau$ — константа из леммы 2. Пусть теперь $r_{n_0+1} = \max\{2r_{n_0}; 2\tau^{-1}(\rho, \Delta(r_{n_0}))\}$, $r_{n+1} = 2r_n$, $n = n_0 + 1, \ldots, n_1 - 1$; $z^{(n)} = r_n\zeta^{(n)}$, $\delta_n = \Delta(r_{n_0})$, $\tau_n = \tau(\rho, \Delta(r_{n_0}))$, $n = n_0 + 1, \ldots, n_1$. Далее, пусть $\zeta^{(n)}$, $n = n_1 + 1, \ldots, n_2$ — центры шаров радиуса $\frac{1}{2}\tau(\rho; \Delta(r_{n_1}))$, образующих конечное покрытие компакта $S \cap \Gamma$. Положим теперь $r_{n_1+1} = \max\{2r_{n_1}; 2\tau^{-1}(\rho; \Delta(r_{n_1}))\}$, $r_{n+1} = 2r_n$, $n = n_1 + 1, \ldots, n_2 - 1$; $z^{(n)} = r_n\zeta^{(n)}$, $\delta_n = \Delta(r_{n_1})$, $\tau_n = \tau(\rho; \Delta(r_{n_1}))$, $n = n_1 + 1, \ldots, n_2$. Далее, пусть $\zeta^{(n)}$, $n = n_2 + 1, \ldots, n_3$ — центры шаров радиуса $1/2\tau(\rho, \Delta(r_{n_2}))$, образующих конечное покрытие компакта $\Gamma \cap S$ и т. д. Таким образом мы построим последовательности точек $\zeta^{(n)}$, $z^{(n)}$, $r_n$, $\tau_n$, $\delta_n$ со свойствами, указанными в пункте б) леммы. При этом можно считать, что $\zeta^{(n)} \in \Gamma \cap S \forall n$. Положим, $\Phi(z) = (|z_1|^\rho + |z_2|^\rho)[1 - \varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(z; z^{(n)}; \delta_n; \rho)]$, где $\varphi(z)$ — функция, построенная в лемме 2. Так как поликруги $P\left(z^{(n)}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ не пересекаются, то функция $\Phi(z)$ п.-с.-г.

в $C^2$. Утверждения а) и б) леммы, очевидно, выполняются. Далее

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{N} P\left(z^{(n)};\ \frac{1}{8};\ \delta_n\right)\right)=\sum_{n=1}^{N} 2^{-6}\pi^2\delta_n^2 r_n^4. \qquad (2)$$

Так как $\delta_n\to 0$ при $n\to\infty$ и $r_{n+1}\geqslant 2r_n\forall n$, то (2) есть $o(r_N^4)$. Это доказывает в). Наконец, для каждой точки $\varsigma\in B(\zeta^{(n)},\ \tau/2)$ точки вида $t\zeta$, где $|t-r_n|\leqslant r_n/15$, попадают в поликруг $P\left(z^{(n)},\ \frac{1}{15}+\frac{8\tau_n}{15};\ \tau_n/2\right)$. Отсюда и из неравенства $\frac{1}{r_n}\leqslant\frac{\tau_n}{2}\leqslant\frac{1}{124}$, которое вытекает из конструкции последовательностей $r_n$, $\tau_n$, следует включение $B(t\zeta,\ 1)\subset P(z^{(n)};\ 1/12,\ \tau_n)$. Осталось заметить, что любая точка $\zeta\in S\cap\Gamma$ принадлежит бесконечному множеству шаров $B\left(\zeta^{(n)};\ \frac{\tau_n}{2}\right)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $f(w)$ — целая функция в плоскости при порядке $\rho$ и индикаторе, тождественно равном 1[1]. Тогда равномерно по $\varphi\in[0,\ 2\pi[$ $\lim\limits_{t\to\infty\, te^{i\varphi}\notin E} t^{-\rho}\ln|f(te^{i\varphi})|=$ $=\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} t^{-\rho}\times\ln|f(te^{i\varphi})|=1$, где $E$ — множество на плоскости, которое может быть покрыто последовательностью кругов $B(w_j,\ r_j)$ так, что $\sum\limits_{j:|w_j|<R} r_j=o(R)$. Поэтому можно построить непрерывную функцию $\alpha(t)\geqslant 0$, $\alpha(t)\to 0$ при $t\to\infty$ такую, что

$$1-\alpha(t)\leqslant t^{-\zeta}\ln|f(te^{i\varphi})|\leqslant 1+\alpha(t), \qquad (3)$$

где правое неравенство будет выполняться для всех $t$, $\varphi$, а левое — при $te^{i\varphi}\notin E$. Положим теперь $\beta(t)=\max\{\alpha(t-1)+(t-1)^{-1}\rho;\ \alpha(t)+3t^{-\rho}\ln(1+3t)\}$ при $t\geqslant 2$ и $\beta(t)=\beta(2)$ при $t<2$. Возьмем монотонную дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\gamma(t)\geqslant\beta(t)$ такую, что[2]

$$\gamma(t)\to 0 \text{ при } t\to\infty \ \ (4);\quad t\gamma'(t)\to 0 \text{ при } t\to\infty \ \ (5);$$
$$t^2\gamma''(t)\to 0 \text{ при } t\to\infty \ \ (6).$$

Из условий (4) — (6) следует, что можно выбрать число $t'>0$ так, что функция $|w|^\rho(1-2\gamma(|w|))$ будет субгармонической при $|w|\geqslant t'$. Эта функция будет субгармонической при всех $w\in C$, если переопределить функцию $\gamma(t)$ при $t<t'$, положив $\gamma(t)=$ $=1/2-1/2[1-2\gamma(t')t'^\rho]t^{-\rho}$ при $t<t'$. Далее, при $t\geqslant t'$ [1 —

---

[1] О существовании таких функций и их свойствах см. [1].

[2] Например можно взять $\gamma(t)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t\frac{1}{s}\int\limits_0^s\max\limits_{r\geqslant q}\{\beta(r)\}\,dq\,ds$.

$-\gamma(t+1)](t+1)^{\rho}\leqslant[1-\alpha(t)]t^{\rho}$. Поэтому из (3) следует, что вне множества $E'=E\cup\{w:|w|<t'\}$

$$|f(w)|\geqslant\sup_{|\lambda|<1}\exp\{[1-\gamma(|w+\lambda|)]|w+\lambda|^{\rho}\},\qquad(7)$$

и при всех $|w|\geqslant t'$

$$|f(w)|\leqslant\exp\{[1+\gamma(|w|)]|w|^{\rho}\}(1+3|w|)^{-3}.\qquad(8)$$

Пусть $\chi(w)$ — такая функция из $C^{\infty}(C)$, что $\chi(w)=1$ при $|w|\leqslant 1$, $\chi(w)=0$ при $|w|\geqslant 3/2$ и $0\leqslant\chi(w)\leqslant 1$ для всех $w$. Выберем в лемме 3 в качестве функции $\Delta(t)$ любую монотонно убывающую к 0 функцию такую, что $\Delta(t)\geqslant\max\{\gamma(2t);\ -t\gamma'(2t)\}^{1/3}$ для всех $t$. Пользуясь обозначениями леммы 3, положим $\varkappa(z)=$ $=2\sum_{n=n'}^{\infty}\chi(6\lambda(z;\ z^{(n)}))\chi(2^{-1}\delta_n^{-1}\mu(z;\ z^{(n)}))$, $\Psi(z)=\frac{1}{2}\Phi(z)+\frac{1}{2}\times$ $\times(|z_1|^{\rho}+|z_2|^{\rho})+[\varkappa(z)-1][\gamma(|z_1|)|z_1|^{\rho}+\gamma(|z_2|)|z_2|^{\rho}]$, где функции $\lambda(z;\ z')$, $\mu(z;z')$ определены соотношениями (1), а $n'=n'(\rho)$ — некоторый фиксированный номер, который будет выбран ниже.

Так как функция $|w|^{\rho}[1/2-\gamma(|w|)]$ субгармонична в $C$, то функция $\Psi(z)$ будет заведомо п.-с.-г. при $z\notin\operatorname{supp}\varkappa(z)$. Далее, для $i,\ j=1,\ 2,\ z\in P\left(z^{(n)},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ при $n\to\infty$ $\frac{\partial\varkappa(z)}{\partial z_j}=$ $=O(\delta_n^{-1}|z^{(n)}|^{-1})=O(\Delta^{-1}(|z^{(n)}|)|z^{(n)}|^{-1};\ \frac{\partial^2\varkappa(z)}{\partial z_i\partial z_j}=O(\delta_n^{-2}|z^{(n)}|^{-2})=$ $=O(\Delta^{-2}(|z^{(n)}|)\times|z^{(n)}|^{-2})$.

Из этих соотношений, из определения функции $\Delta(t)$, а также из соотношений (4)—(6) вытекает, что для $z\in P(z^{(n)},\ 1/4,\ 1/4)$ форма Леви функции $[\varkappa(z)-1][\gamma(|z_1|)|z_1|^{\rho}+\gamma(|z_2|)|z_2|^{\rho}]$ есть величина $o(|z^{(n)}|^{\rho-2})$ при $n\to\infty$. Поэтому, пользуясь леммой 1 можно выбрать $n'$ так, что $\Psi(z)$ будет п.-с.-г. функцией в $C^2$.

Положим теперь $A_2=\bigcup_{n=n'}^{\infty}P(z^{(n)};\ 1/6;\ 2\Delta_n)$; $A_3=\bigcup_{n=n'}^{\infty}P(z^{(n)}$ $1/4+1/|z^{(n)}|;\ 3\Delta_n+1/|z^{(n)}|)$. Нетрудно показать (см. доказательство пункта в) леммы 3), что множество $A_3$ имеет относительную меру нуль. Из соотношений (7), (8) следует, что вне множества $A_4\overset{\text{def}}{=}A_3\cup\{z:z_1\in E'\}\cup\{z:z_2\in E'\}$, которое тоже имеет нулевую относительную меру, выполняется неравенство

$$\sup_{|z-\zeta|<1}\exp\Psi(\zeta)\leqslant|f(z_1)|\cdot|f(z_2)|,\qquad(9)$$

а на множестве $A_2\setminus A_1$, где $A_1$ — множество из леммы 3, выполняется неравенство

$$\exp\Psi(z)\geqslant|f(z_1)f(z_2)|\cdot(1+|z|)^6.\qquad(10)$$

Построим функцию $\eta(z)\in C^\infty(C^2)$ такую, что $0\leqslant\eta(z)\leqslant 1$ для всех $z$, $\eta(z)=0$ при $z\in A_1$, $\eta(z)=1$ при $z\notin A_2$ и $\|\bar\partial\eta\|=$ $=\left(\left|\frac{\partial\eta}{\partial\bar z_1}\right|^2+\left|\frac{\partial\eta}{\partial\bar z_2}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant 1$ для всех $z\in C^2$. Положим $F(z)=\eta(z)f(z_1)\times$ $\times f(z_2)-V(z)$, где $V(z)$ — решение $\bar\partial$-проблемы $\bar\partial V(z)=f(z_1)\times$ $\times f(z_2)\bar\partial\eta(z)$ **(11)** в пространстве $L^2(C^2)$ с весом $\exp\{-2\Psi(z)\}$. Это решение существует, так как ввиду (10), $\int\limits_{C^2}\|\bar\partial\eta(z)\|\cdot|f(z_1)f(z_2)|^2\exp\times$ $\times\{-2\Psi(z)\}(1+|z|^2)^2\,dm\leqslant\int\limits_{A_2\setminus A_1}|f(z_1)f(z_2)|^2\exp\{-2\Psi(z)\}(1+$ $+|z|)^4\,dm\leqslant\pi^2/6$. По теореме Л. Хермандера [12, с. 131] существует удовлетворяющая (11) функция $V(z)$, для которой

$$\int\limits_{C^2}|V(z)|^2\exp\{-2\Psi(z)\}\,dm\leqslant\frac{\pi^2}{12}. \tag{12}$$

Пусть точка $z$ выбрана так, что $B(z,1)\cap\operatorname{supp}\bar\partial\eta=\varnothing$. Тогда функция $V(z)$ аналитична в шаре $B(z,1)$ и, следовательно,

$$|V(z)|\leqslant\frac{2}{\pi^2}\int\limits_{|z-\zeta|<1}|V(\zeta)|\,dm\leqslant\frac{2}{\pi^2}\Big[\int\limits_{|z-\zeta|<1}\exp 2\Psi(\zeta)\,dm]^{1/2}\times$$
$$\times\left\{\int\limits_{|z-\zeta|<1}|V(\zeta)|^2\exp(-2\Psi(\zeta))\,dm\right\}^{1/2}.$$

Ввиду (12) интеграл в фигурных скобках не больше $\pi^2/12$, поэтому

$$|V(z)|\leqslant\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\sup_{|z-\zeta|<1}\exp\Psi(\zeta). \tag{13}$$

Отсюда и из (9) следует, что $z\notin V_4$

$$|F(z)-f(z_1)f(z_2)|=|V(z)|\leqslant\frac{1}{\pi\sqrt{3}}f(z_1)f(z_2)|. \tag{14}$$

Заметим теперь, что при всех $z\in C^2$

$$F(z)\leqslant\frac{2}{\pi^2}\int\limits_{|\zeta-z|<1}|V(\zeta)+\eta(\zeta)f(\zeta_1)f(\zeta_2)|\,dm\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2}{\pi^2}\int\limits_{|\zeta-z|<1}|V(\zeta)|\,dm+\frac{2}{\pi^2}\int\limits_{|\zeta-z|<1}|f(\zeta_1)f(\zeta_2)|\,dm=I_1+I_2.$$

Как и выше, величина $I_1$ при всех $z\in C^2$ оценивается сверху выражением $\sup\limits_{|z-\zeta|<1}\exp\Psi(\zeta)$ значит, растет не быстрее, чем $K_3\exp\{3|z|^\rho\}$. Аналогичная оценка допускается и для величины $I_2$. Следовательно, функция $F(z)$ имеет рост не выше нормального типа при порядке $\rho$. Заметим теперь, что для любой целой функции $g(z)$ нормального типа при порядке $\rho$ и любого множества $D$ нулевой относительной меры[1] $\int\limits_{\{z\in B(1): tz\in D\}} \ln|g(tz)|\,dm = o(t^\rho)$.

Применяя это утверждение к функциям $F(z)$, $f(z_1)f(z_2)$ и учитывая (14), заключаем, что функция $F(z)$ имеет в. р. р. в смысле А), причем для почти всех $z\in C^2$

$$L_r(z,\ F) = L_r(z;\ f(z_1)f(z_2)) = |z_1|^\rho + |z_2|^\rho. \tag{15}$$

Далее, из определения функции $\Psi(z)$ следует, что она, так же как функция $\Phi(z)$, удовлетворяет условию г) леммы 3 (с заменой $\varepsilon$ на $\frac{\varepsilon}{3}$). Так как $\operatorname{supp}\bar\partial\eta \cap A_1 = \varnothing$, то, пользуясь оценкой (13), получаем, что для всех $\zeta\in S\cap\Gamma$ найдется последовательность $t'\to\infty$ такая, что при $t\in\left[t'-\frac{t'}{15},\ t'+\frac{t'}{15}\right] |F(t\zeta)| = |V(t\zeta)| \leqslant \leqslant \exp\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{3}\right)[(t|\zeta_1|+1)^\rho + (t|\zeta_2|+1)^\rho]\right\}$. Следовательно, для тех $z\in\Gamma$, для которых равенство (15) выполняется, т. е. для почти всех $z\in\Gamma$, функция $F(z\cdot w)$ не является функцией в. р. р по переменной $w\in C$.

Наконец, пусть $T$ — автоморфизм в $C^2$ вида $(z_1,\ z_2)\to\left(\frac{z_1+z_2}{\sqrt2},\ \frac{z_1-z_2}{\sqrt2}\right)$. Функция $\tilde F(z) = F(z)F(Tz)$ имеет порядок $\rho$ и вполне регулярный рост в смысле (А), а ее сужение на лучи $\{z\cdot w : w\in C\}$ для почти всех $z\in\Gamma\cup T^{-1}(\Gamma)$ не является функцией в. р. р. по переменной $w$. Осталось заметить, что $\Gamma\cup T^{-1}(\Gamma) = C^2|\{0\}$. Теорема доказана.

**Список литературы:** 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М.: Гостехиздат, 1956.— 632 с. 2. *Азарин В. С.* О субгармонических функциях вполне регулярного роста в многомерном пространстве.— Докл. АН СССР, 1962, **146**, № 4, с. 743—746. 3. *Агранович П. З.*, *Ронкин Л. И.* О функциях вполне регулярного роста многих переменных. Препринт ФТИНТ АН УССР,— Харьков, 1976.— 21 с. 4. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических и целых функций.— Докл. АН СССР, 1976, **229**, № 6, с. 1289—1291. 5. *Агранович П. З.* Об одном критерии регулярности роста. Препринт 30—77 ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1977.—17 с. 6. *Агранович П. З.* О функциях вполне регулярного роста многих переменных.— Теория функций, функц. анализ и их прил., 1978, вып. 30, с. 3—13. 7. *Фаворов С. Ю.* О сложении индикаторов целых и субгармонических функций.— Мат. сб., 1978, **105**, № 1, с. 128—140. 8. *Gruman L.* Eutire function of severel variables and their asymptotic frowth.— Arkiv for mathematic, 1971, **9**, № 1, p. 141—163. 9. *Berndtsson B. O.* On the asymptotic growth of (plury) subharmonic functions. Препринт Гетеборгского университета № 1976—10, Швеция, 1976, с. 1—15. 10.

[1] Эквивалентные утверждения доказываются, например, в [3, с. 9; 7, с. 131].

*Моржаков В. В.* Дифференциальные операторы бесконечного порядка в пространствах голоморфных функций многих комплексных переменных. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Ростов н/Д, 1974.—13 с. 11. *Фаворов С. Ю.* О множествах понижения субгармонических функций вполне регулярного роста. — Сиб. мат. журн., 1979, **20**, № 6, с. 1294—1302. 12. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.— М.: Мир, 1968.—277 с..

*Поступила в редколлегию 15.01.79.*