УДК 517.9

Е. И. ТАРАПОВА

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ N-ВОЛНОВОЙ ЗАДАЧИ

В работах Захарова В. Г. и Манакова С. В. [1, 2] был развит метод интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений $\partial/\partial t\,[\mathcal{J},\ y]-\frac{\partial}{\partial x}[I,\ y]+i\,[[\mathcal{J},\ y],\ [I,\ y]]=0$ **(1)** ($\mathcal{J}, I$ — диагональные вещественные матрицы), описывающей взаимодействия нескольких волн. В настоящей статье мы покажем, что метод интегрирования нелинейных уравнений, использованный в работе [3], пригоден для интегрирования уравнений вида (1).

Обозначим через Б банахову алгебру над полем комплексных чисел, элементы которой в дальнейшем называются операторами. Рассмотрим гладкое отображение Г двумерного евклидова пространства R^2 в алгебру Б. Точки пространства R^2 мы будем обозначать через $(x,\ t)$, а образ точки $(x,\ t)\in R^2$ при отображении Г через $\Gamma(x,\ t)$.

Лемма. *Пусть отображение $\Gamma(x,\ t)$ удовлетворяет следующим уравнениям: $\Gamma'=iA\Gamma\mathcal{J}$; $\dot{\Gamma}=iA\Gamma I$* **(2)**, *где A, $\mathcal{J}$, I — постоянные обратимые операторы, $[\mathcal{J},\ I]=0$, точка и штрих означают дифференцирование по t и по x соответственно. Тогда $U(x,\ t)=$ $=\Gamma^{-1}A\Gamma$* **(2′)** *удовлетворяет уравнениям $U'+iU[\mathcal{J},\ U]=0$; $\dot{U}+iU[I,\ U]=0$* (3).

Доказательство. Согласно (2), (2′), имеем

$$U'=(\Gamma^{-1}A\Gamma)'=-\Gamma^{-1}\Gamma'\Gamma^{-1}A\Gamma+\Gamma^{-1}A\Gamma'=-iU\mathcal{J}U+iU^2\mathcal{J}=-i\times$$
$$\times U[\mathcal{J},\ U];\ \dot{U}=(\Gamma^{-1}A\Gamma)^{\cdot}=-\Gamma^{-1}\dot{\Gamma}\Gamma^{-1}A\Gamma+\Gamma^{-1}A\dot{\Gamma}=-iUIU+i\times$$
$$\times U^2I=-iU[I,\ U],$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *При условиях леммы операторная функция $U(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению $\partial/\partial t\,[\mathcal{J},\ U]-\partial/\partial x\,[I,\ U]+$ $+i\,[[\mathcal{J},\ U],\ [I,\ U]]=0$.* (4)

Доказательство. Коммутируя первое уравнение системы (3) с I, а второе — с $\mathcal{J}$ и беря разность полученных выражений, приходим к уравнению (4), если учесть, что $[I,\ [\mathcal{J},\ U]]=[\mathcal{J},$ $[I,\ U]]$, так как $[I,\ \mathcal{J}]=0$ по условию.

Пусть Б — алгебра квадратных матриц порядка NM и $\Gamma(x, t)$ — такое решение системы (2), что $\Gamma'(E - P_м) = \Gamma Q$ **(5)**, где $P_м$ и Q — постоянные матрицы, удовлетворяющие условиям $P^2_м = P_м$; $P^*_м = P_м$; $[P_м, \mathcal{I}] = [P_м, I] =$; $[Q, \mathcal{I}] = [Q, I] = 0$. Тогда матричная функция $U_м = P_м U P_м$ удовлетворяет уравнению того же вида, что и функция $U(x, t)$, а именно:

$$\partial/\partial t\,[P_м \mathcal{I} P_м, U_м] - \partial/\partial x\,[P_м I P_м, U_м] + i\,[[P_м \mathcal{I} P_м, U_м], [P_м I P_м, U_м]] = 0. \qquad (6)$$

Действительно, из (5) и (2) находим, что $U = \Gamma^{-1} A \Gamma = -i\Gamma^{-1}\Gamma' \mathcal{I}^{-1} = -i\Gamma^{-1}\Gamma' P_м \mathcal{I}^{-1} - iQ\mathcal{I}^{-1} = UP_м - iQ\mathcal{I}^{-1}$. Подставляя это выражение в уравнение (4) и умножая обе части полученного равенства на $P_м$, приходим к уравнению (6).

Заметим, что

$$\Gamma(x, t) = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(N-1)} & \gamma_1^{(N-2)} & \dots & \gamma_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_N^{(N-1)} & \gamma_N^{(N-2)} & \dots & \gamma_N \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

где $\gamma_i = \gamma_i(x, t)$ — матрицы порядка $M, \gamma_i^{(k)}(x, t) = \frac{\partial^k}{\partial x^k}\gamma_i\ (x, t)$ ($k =$, $1, \dots, N-1$), удовлетворяет условию (5), причем

$$P_м = \begin{pmatrix} E_м & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & E_м & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & E_м \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $E_м$ — единичная матрица порядка M. Для того, чтобы (7) удовлетворяла также системе (2) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_м^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_м^{(N)} \end{pmatrix}; \quad \mathcal{I} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_м & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{I}_м \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} I_м & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I_м \end{pmatrix}$$

($\mathcal{I}_м$, $I_м$ — диагональные вещественные матрицы), нужно, чтобы матрицы $\gamma_k(x, t)$ были решениями следующих систем:

$$\begin{cases} \gamma_k' = i a_м^{(\kappa)} \gamma_\kappa \mathcal{I}_м; \\ \dot{\gamma}_\kappa = i a_м^{(\kappa)} \gamma_k I_м. \end{cases}$$

Согласно предыдущему, $U_м = P_м \Gamma^{-1} A \Gamma_м$ удовлетворяет уравнению $\partial/\partial t\,[\mathcal{I}_м, U_м] - \partial/\partial x\,[I_м, U_м] + i\,[[\mathcal{I}_м, U_м], [I_м, U_м]] = 0$ при любом выборе матриц $a_м^{(1)}, a_м^{(2)}, \dots, a_м^{(N)}$, которые здесь являются матричными параметрами.

Приведем окончательный результат для простейшей системы, когда $M = 3$, $N = 1$, которая описывает взаимодействие трех волн ([1], [2]). Заметим, что из физических условий следует, что интерес представляют те решения, для которых $[\mathcal{I}, U]^* = [\mathcal{I}, U]$.

Это условие накладывает некоторые требования на матрицу A. Легко проверить, что если $A=\alpha(E-P)+\bar{\alpha}P$; $P^2=P$; $P^*=P$, то решение системы (2) при начальном условии $\Gamma(0,\ 0)=E$ таково: $\Gamma(x,\ \ t)=(E-P)\exp(i\alpha(\mathcal{J}x+It))+P\exp(i\bar{\alpha}(\mathcal{J}x+It))$ **(8)** и при этом матричная функция $U=\Gamma^{-1}A\Gamma$ удовлетворяет условию $[\mathcal{J},\ U]^*=[\mathcal{J},\ U]$. Если предположить, что P — оператор ортогонального проектирования на орт $\vec{p}$, то легко найти $\Gamma^{-1}(x,t)$ и $\Gamma^{-1}(x,\ t)=\exp(-i\alpha(\mathcal{J}x+It))\{E+\tilde{P}-\tilde{P}\exp(i(\bar{\alpha}-\alpha)(\mathcal{J}x+$ $+It))\}$ **(9)**, где $\tilde{P}=\dfrac{P}{(\exp(-i\alpha(Jx+It))\vec{p},\ \exp(-i\alpha(Jx+It)(\vec{p})}$.

Отсюда для $U(x,\ t)$ получаем формулу Захарова—Манакова

$$U=\Gamma^{-1}A\Gamma=\alpha E+(\bar{\alpha}-\alpha)\exp(-i\alpha(\mathcal{J}x+It))\tilde{P}\exp(i\bar{\alpha}(\mathcal{J}x+It))\ (10)$$

и

$$\mathcal{J},\ U]=(\bar{\alpha}-\alpha)\exp(-i\alpha(\mathcal{J}x+It))[\mathcal{J},\ \tilde{P}]\exp(i\bar{\alpha}(\mathcal{J}x+It));$$
$$[I,\ U]=(\bar{\alpha}-\alpha)\exp(-i\alpha(\mathcal{J}x+It))[I,\ \tilde{P}]\exp(i\bar{\alpha}(\mathcal{J}x+It)).$$

Список литературы: 1 *Захаров В. Е., Манаков С. В.* К теории резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах. — ЖЭТФ, 1975, т. **69**. вып. 5, с. 1654—1673. 2. *Захаров В. Е., Манаков С. В.* О резонансном взаимодействии пакетов в нелинейных средах. — Письма в ЖЭТФ, **18**, вып. 7, с. 413—417. 3. *Тарапова Е. И.* N-солитонные решения одной нелинейной системы уравнений. — Теория функций, функц. анализ и их прил., 1981, вып 36, с. 103—111.

Поступила в редколлегию 14.01.80.