УДК 519.4

ВУ КУОК ФОНГ

ОБ ОПЕРАТОРАХ КЛАССА K

Линейный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве называется оператором класса K [1], если для любого $n = 2, 3, \ldots$ и $1 \leqslant m < n$ выполняются неравенства $\| T^m x \| \leqslant C_{n,m} \| x \|^{\frac{n-m}{n}} \times \| T^n x \|^{\frac{m}{n}}$.

Через $K_{m,n}$ обозначим подкласс класса K, состоящий из таких операторов T, что $\| T^m x \| \leqslant \| x \|^{\frac{n-m}{n}} \cdot \| Tx \|^{\frac{m}{n}}$.

Класс $K_{m,n}$ изучался в работах [2], [3]. В настоящей заметке мы установим некоторые новые свойства операторов класса $K_{m,n}$. Отметим, что каждый оператор класса $K_{1,2}$ лежит в любом другом $K_{m,n}$, но не наоборот [см. 1, 2], а в случае $n = 2$, $m = 1$ основные результаты этой заметки были ранее получены в работе [4] (см. также замечание ниже).

Основную роль в дальнейшем играют следующие леммы.

Лемма 1. *Ограниченный линейный оператор T принадлежит классу $K_{m,n}$ тогда и только тогда, когда* $T^{*n}T^n - \left[n/m^{\frac{m}{n}} (n - m)^{\frac{n-m}{n}} \right] \rho^{n-m} T^{*m} T^m + \rho^n \geqslant 0 \quad (\forall \rho \geqslant 0)$.

Далее, пусть $A = (T^{*n-m} T^{n-m})^{1/2}$, $B = (T^m T^{*m})^{1/2}$.

Лемма 2. *Ограниченный оператор T принадлежит классу $K_{m,n}$ тогда и только тогда, когда* $BA^2B - \left[n/m^{\frac{m}{n}} (n - m)^{\frac{n-m}{n}} \right] \rho^{n-m} B^2 + \rho^n \geqslant 0 \quad (\rho \geqslant 0)$.

Теорема 1. *Пусть T — такой ограниченный оператор, что $\operatorname{Ker} T^{n-m} \subset \operatorname{Ker} T^{*m}$ и $m \log A \geqslant (n - m) \log B$,* где *$A$ и B — ограничения ${T^*}^{n-m}\, T^{n-m}$ и $T^m T^{*m}$ соответственно на область значений $R(T^m)$ оператора T^m. Тогда T является оператором класса $K_{m,n}$.*

Следствие 1. *Если для некоторого $s > 0$ имеем $(T^{*n-m} T^{n-m})^{sm} \geqslant (T^m T^{*m})^{s(n-m)}$, то $T \in K_{m,n}$.*

Операторы T и S назовем дважды коммутирующими, если T коммутирует с S и S^*.

Теорема 2. *Пусть T, S — дважды коммутирующие линейные ограниченные операторы класса $K_{m,n}$. Тогда произведение $TS \in K_{m,n}$, если существует самосопряженный оператор A и ограниченные положительные измеримые функции $f(t)$, $g(t)$ такие, что $(f(t) - f(s))(g(t) - g(s)) \geqslant 0$ $-\infty < s,\ t < +\infty$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) $f(A) = T^{*m}T^m$, $g(A) = S^{*n-m}S^{n-m}$; 2) $f(A) = T^{*n}T^n$, $g(A) = S^{*m}S^m$; 3) $f(A) = T^{*n}T^n$, $g(A) = S^{*n}S^n$.

Теорема 3. *Если линейный ограниченный оператор T класса $K_{m,n}$ дважды коммутирует с некоторым оператором S таким, что $(S^{*n-m}S^{n-m})^m \geqslant (S^m S^{*m})^{n-m}$, то произведение TS принадлежит классу $K_{m,n}$.*

Оператор T называется гипонормальным, если $T^*T > TT^*$. Ясно, что гипонормальные операторы принадлежат классу $K_{1,2}$. В работе [4] построен пример гипонормального оператора T такого, что $T^2 - \lambda$ не принадлежит $K_{1,2}$ (для некоторого λ). С другой стороны, $T^2 - \lambda = (T - \lambda)(T + \lambda)$ и оба $T - \lambda$, $T + \lambda$ являются гипонормальными операторами. Этот пример показывает, что условие дважды коммутируемости в теореме 3 существенно, даже если предполагать гипонормальность рассматриваемых операторов. Нетрудно также привести пример дважды коммутирующих оп раторов класса $K_{m,n}$, произведение которых не принадлежит $K_{m,n}$ (ср. теорему 2). В связи со следствием 1 естественно называть операторы, удовлетворяющие $(T^{*n-m}T^{n-m})^m \geqslant (T^mT^{*m})^{n-m} \times$ $\times (m, n)$, гипонормальными. Тогда (1, 2)-гипонормальность означает просто гипонормальность, (m, n)-гипонормальные операторы принадлежат $K_{m,n}$ и, в отличие от свойства $K_{1,2} \subset K_{m,n}$ для всех $m < n < +\infty$, (1, 2)-гипонормальность не влечет, вообще говоря, (m, n)-гипонормальность. Для построения соответствующего примера достаточно взять гипонормальный оператор, квадрат которого не гипонормален [5, задача 164].

Теорема 4. *Пусть T — оператор класса $K_{m,n}$ такой, что $T^{*n-m}T^{n-m}$ и T^mT^{*m} коммутируют. Тогда оператор T (m, n)—гипонормален.*

Для класса $K_{1,2}$ этот результат получен ранее в статье [6].

Следствие 2. *Если T — оператор класса $K_{1,2}$ и T^*T, TT^* коммутируют, то T гипонормален и имеет нетривиальное инвариантное подпространство.*

Доказательства теорем 1—4 используют леммы 1, 2 и стандартные рассуждения спектральной теории.

В работах [2], [3] доказано, что если T — оператор класса $K_{m,n} \cap K_{n-m,n}$ и его спектр $\sigma(T)$ лежит на счетном объединении окружностей с общим центром в нуле, то $T^{d(n,m)}$ нормален, где $d(n, m)$ — наибольший общий делитель n и m. В работе [7] был построен пример оператора класса $K_{1,2}$ с вещественным спектром, который не самосопряжен. Следующие две теоремы дополняют результаты об условиях нормальности операторов класса $K_{m,n}$.

Теорема 5. *Если $T \in K_{m,n} \cap K_{n-m,n}$ и T^k нормален для некоторого $k > 0$, то оператор $T^{d(n,m)}$ нормален.*

Теорема 6. *Пусть оператор T обратим (или 0 является изолированной точкой спектра $\sigma(T)$) и T, $T^* \in K_{m,n} \cap K_{n-m,n}$. Тогда $T^{d(n,m)}$ нормален.*

В теоремах 5, 6 $d(n, m)$ — наибольший общий делитель n и m. Утверждения этих теорем не справедливы, вообще говоря, для степеней, более низких, чем $d(n, m)$. Примеры следуют из статьи [2].

Доказательства теорем 5, 6 используют, кроме лемм 1, 2, следующие леммы.

Лемма 3. *Если $T \in K_{m,n} \cap K_{n-m,n}$ то $T \in K_{pm, n+pqm}$ для всех $p = 1, 2, \ldots, q = 0, 1, 2, \ldots$*

Лемма 4. *Если $T \in K_{m,n} \cap K_{n-m,n}$ то $\|T^m\| = \rho(T^m)$, где через $\rho(T)$ обозначается спектральный радиус оператора T.*

Лемма 5. *Если A, B — положительные ограниченные операторы такие, что $p_{m,n}\lambda^m A^n (A^n + \lambda^n)^{-1} \leqslant B \leqslant (p_{m,n}\lambda^{n-m})^{-1} (A^n + \lambda^n)$ для всех $\lambda > 0$, где $p_{m,n} = n/m^{\frac{m}{n}} (n-m)^{\frac{n-m}{n}}$, то $A^m = B$.*

Замечание. Автор работы [4] доказывает утверждение теоремы 6 для класса $K_{1,2}$, предполагая лишь $\operatorname{Ker} T^* = \operatorname{Ker} T$ вместо обратимости T. Однако его рассуждение содержит неточность, так как из условия $S = (BA^2B)^{1/2}$, A, B — положительные ограниченные операторы, не следует, вообще говоря, что $D(S^{-1}) = D((BA)^{-1})$. Построенный нами пример [7] также показывает, что без условия обратимости T теорема 6 может нарушиться.

Список литературы: **1.** *Любич Ю. И.* О неравенствах между степенями линейного оператора. — Изв. АН СССР, 1960, т. 24, с. 825—864. **2.** *Любич Ю. И.* Одна теорема об операторах класса K. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1965, вып. 1, с. 212—219. **3.** *Милославский А. И.* Об одном свойстве операторов класса K.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1974, вып. 21, с. 30—36. **4.** *Ando T.* Operators with norm condition.— Acta Sci. Math., 1972, v. 33, № 3-4, p. 167-178. **5.** *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. М., Мир, 1970. 352 с. **6.** *Campbell S.* Linear operators for which T^*T and TT^* commute.— Pacif. J. Math., 1974, v. 53, № 2, p. 355-361. **7.** *Ву Куок Фонг.* Квазигипонормальные операторы и операторы класса K.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1978, вып. 31, с. 13—16.

Поступила 17 января 1978 г.