УДК 517.94

Е. И. ТАРАПОВА

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ. II

Рассмотрим задачу, порождаемую на сегменте $[0, 3\pi]$ уравнением Штурма — Лиувилля

$$-y''(x) + q(x)\,y(x) = \lambda^2 y(x) \tag{1}$$

и граничными условиями

$$\begin{gathered} a_{i1} y^2(0) + a_{i2} y'(0)\,y(0) + a_{i3}[y'(0)]^2 + a_{i4} y^2 \pi + \\ + a_{i5}[y'(\pi)]^2 + a_{i6} y(\pi) y'(\pi) + a_{i7} y(0)\,y(\pi) + \\ + a_{i8} y(0)\,y'(\pi) + a_{i9} y'(0)\,y(\pi) + a_{i10} y'(0)\,y'(\pi) = 0 \\ (i = 1,\ 2), \end{gathered} \tag{2}$$

где комплекснозначная функция $q(x) \in L^1[0, 3\pi]$ и $a_{ij} = a_{ij}(\lambda)$ $(i = 1, 2;\ j = 1, \ldots, 10)$ многочлены от λ. Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\omega(\lambda, x) = aC(\lambda, x) + bS(\lambda, x), \tag{3}$$

где $C(\lambda, x)$ и $S(\lambda, x)$ — решения этого уравнения при начальных данных:

$$C(\lambda, 0) = 1,\ C'(\lambda, 0) = 0;\ S(\lambda, 0) = 0,\ S'(\lambda, 0) = 1$$

и a, b — произвольные комплексные числа.

Подставляя выражение (3) в граничные условия, получаем систему двух квадратных уравнений относительно неизвестных a и b:

$$\begin{cases} P_{11}a^2 + Q_{11}ab + R_{11}b^2 = 0; \\ P_{21}a^2 + Q_{21}ab + R_{21}b^2 = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} P_{i1} = a_{i1}C^2(\lambda, 0) + a_{i4}C^2(\lambda, \pi) + a_{i6}C(\lambda, \pi)\,C'(\lambda, \pi) + \\ + a_{i7}C(\lambda, 0)\,C(\lambda, \pi) + a_{i8}C(\lambda, 0)\,C'(\lambda, \pi) + a_{i5}C'^2(\lambda, \pi); \\ Q_{i1} = a_{i2}C(\lambda, 0)\,S'(\lambda, 0) + 2a_{i4}C(\lambda, \pi)\,S(\lambda, \pi) + \\ + 2a_{i5}C'(\lambda, \pi)\,S'(\lambda, \pi) + a_{i6}\,[C(\lambda, \pi)\,S'(\lambda, \pi) + \\ + S(\lambda, \pi)\,C'(\lambda, \pi)] + a_{i7}C(\lambda, 0)\,S(\lambda, \pi) + \\ + a_{i8}\,C(\lambda, 0)\,S'(\lambda, \pi) + a_{i9}S'(\lambda, 0)\,C(\lambda, \pi) + \\ + a_{i10}\,S'(\lambda, 0)\,C'(\lambda, \pi); R_{i1} = a_{i3}S'^2(\lambda, 0) + a_{i4}S^2(\lambda, \pi) + \\ + a_{i5}\,S'^2(\lambda, \pi) + a_{i6}S(\lambda, \pi)S'(\lambda, \pi) + \\ + a_{i9}S'(\lambda, 0)\,S(\lambda, \pi) + a_{i10}S'(\lambda, 0)\,S'(\lambda, \pi). \end{gathered} \tag{5}$$

Существование нетривиального решения $(|a|^2 + |b|^2 \neq 0)$ этой системы является необходимым и достаточным условием того, чтобы функция $\omega(\lambda, x)$ была нетривиальным решением краевой задачи (1) — (2). Но система (4) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее результант $\chi(\lambda) = \det[\chi_{ij}(\lambda)]$ равен нулю. Здесь $\chi_{14} = \chi_{21} = \chi_{34} = \chi_{41} = 0$; $\chi_{i1} = \chi_{i+1,\,2} = P_{i1}$; $\chi_{i2} = \chi_{i+1,\,3} = Q_{i1}$; $\chi_{i3} = \chi_{i+1,\,4} = R_{i1}$ $(i = 1, 3)$. Таким образом, характеристическими значениями задачи (1) — (2) являются корни функции $\chi(\lambda)$. Введем теперь понятие собственных и присоединенных функций этой задачи. Легко проверить, что функции

$$\begin{gathered} \omega_1(\lambda, x) = C(\lambda, x)\,(\chi_{31} \cdot \chi_{13} - \chi_{11} \cdot \chi_{33}) - \\ - S(\lambda, x)\,(\chi_{12}\chi_{31} - \chi_{11} \cdot \chi_{32});\ \omega_2(\lambda, x) = \\ = C(\lambda, x)\,(\chi_{12} \cdot \chi_{33} - \chi_{32}\chi_{13}) - \\ - S(\lambda, x)\,(\chi_{11} \cdot \chi_{33} - \chi_{31} \cdot \chi_{13}) \end{gathered} \tag{6}$$

являются решениями задачи (1) — (2), когда λ совпадает с нулями характеристической функции $\chi(\lambda)$, т. е. они являются собственными функциями рассматриваемой задачи или тождественно равными нулю.

Характеристическое значение λ_n называется p-кратным, если оно является p-кратным корнем характеристической функции $\chi(\lambda)$. Положим $\omega_j^{(k)}(\lambda, x) = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k} \omega_j(\lambda, x)|_{\lambda=\lambda_n}$, $(j = 1, 2;\ k = 1, \ldots$ $\ldots, p-1)$ и пусть k_0 — наименьшее значение k, при котором $\omega_j^{(k)}(\lambda, x) \not\equiv 0$. Тогда функция $\omega_j^{(k_0)}(\lambda, x)$ является, очевидно, собственной, а функции $\omega_j^{(k)}(\lambda, x)$ $(k_0 < k < p-1)$ называются присоединенными к ней.

Из существования операторов преобразования и теоремы Римана — Лебега вытекает, что в области G, получающейся из λ-плоскости выбрасыванием кружков сколь угодно малого фиксированного радиуса с центрами в нулях функций $\cos\lambda\pi$ и $\sin\lambda\pi$, выполняются такие асимптотические равенства:

$$C(\lambda, \pi) = \cos\lambda\pi\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right];$$

$$C'(\lambda, \pi) = -\lambda\sin\lambda\pi\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right];$$

$$S(\lambda, \pi) = \frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right];$$

$$S'(\lambda, \pi) = \cos\lambda\pi\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]. \tag{7}$$

Учитывая теперь формулы (5) и (7), после несложных преобразований получаем следующие выражения для функций χ_{ij} в области G:

$$\chi_{1j} = \chi_{2,\, j+1} = A_{1j} + B_{1j}\cos 2\lambda\pi + C_{1j}\sin 2\lambda\pi + \\ + D_{1j}\cos\lambda\pi + E_{1j}\sin\lambda\pi + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)(A_{1j} - a_{1j} + \\ + B_{1j}\cos 2\lambda\pi + C_{1j}\sin 2\lambda\pi + D_{1j}\cos\lambda\pi + E_{1j}\sin\lambda\pi);$$

$$\chi_{3j} = \chi_{4,\, j+1} = A_{2j} + B_{2j}\cos 2\lambda\pi + C_{2j}\sin 2\lambda\pi + \\ + D_{2j}\cos\lambda\pi + E_{2j}\sin\lambda\pi + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)(A_{2j} - a_{2j} + B_{2j}\cos 2\lambda\pi + \\ + C_{2j}\sin 2\lambda\pi + D_{2j}\cos\lambda\pi + E_{2j}\sin\lambda\pi\ (j = 1, 2, 3), \tag{8}$$

где

$$A_{i1} = a_{i1} + \frac{a_{i4} + \lambda^2 a_{i5}}{2},\ B_{i1} = \frac{a_{i4} - \lambda^2 a_{i5}}{2};$$

$$C_{i1} = -\frac{1}{2}\lambda a_{i6},\ D_{i1} = a_{i7},\ E_{i1} = -\lambda a_{i8};$$

$$A_{i2} = a_{i2},\ B_{i2} = a_{i6},\ C_{i2} = \frac{1}{\lambda}a_{i4} - \lambda a_{i5};$$

$$D_{i2} = a_{i8} + a_{i9},\ E_{i2} = \frac{1}{\lambda}a_{i7} - \lambda a_{i10};$$

$$A_{i3} = a_{i3} + \frac{1}{2}a_{i5} + \frac{1}{2\lambda^2}a_{i4},\ B_{i3} = \frac{1}{2}a_{i5} - \frac{1}{2\lambda^2}a_{i4},$$

$$C_{i3} = \frac{1}{2\lambda}a_{i6},\ D_{i3} = a_{i10},\ E_{i3} = \frac{a_{i9}}{\lambda}\ (i = 1, 2). \tag{8'}$$

Обозначим через $N_p\,(p=1,\ 2)$ наибольшие степени полиномов $A_{pj},\ A_{pj}-a_{pj},\ B_{pj},\ C_{pj},\ D_{pj},\ E_{pj}\ (j=1,\ 2,\ 3)$ и через $\tilde{A}_{pj}$, $\tilde{A}_{pj}-\tilde{a}_{pj},\ \tilde{B}_{pj},\ \tilde{C}_{pj},\ \tilde{D}_{pj},\ \tilde{E}_{pj}$ коэффициенты, стоящие при λ^{N_p} в этих полиномах. В дальнейшем мы будем рассматривать граничные условия, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$(\tilde{B}_{11})^2+(\tilde{C}_{11})^2\neq 0,\ (\tilde{D}_{23})^2+(\tilde{E}_{23})^2\neq 0;$$
$$a_{24}-a_{25}\lambda^2\equiv 0,\ a_{26}\equiv 0. \tag{9}$$

Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *При условии* (9) *собственные и присоединенные функции краевой задачи* (1) — (2) *образуют полную систему в пространстве* $L^2[0,\ 3\pi]$. *Если из множества собственных и присоединенных функций убрать любые* N_1+N_2 *функций, то остающаяся система тоже полна в пространстве* $L^2[0,\ 3\pi]$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Существует система неограниченно расширяющихся контуров* Γ_n *таких, что при* $\lambda\in\Gamma_n$ $m_1\varphi(\lambda)<|\chi_{1j}(\lambda)|<M_1\varphi(\lambda)$; $m_2\,\psi(\lambda)<|\chi_{3j}(\lambda)|<M_2\,\psi(\lambda)\ (j=1,\ 2,\ 3)$; где $\varphi(\lambda)=|\lambda|^{N_1}\,|\tilde{A}_{11}+\sqrt{\tilde{B}_{11}^2+\tilde{C}_{11}^2}\cdot\cos(2\lambda\pi+\alpha_{11})\,|\left(1+O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right)(1+o(1))$. $\psi(\lambda)=|\lambda|^{N_2}\,|\tilde{A}_{23}+\sqrt{\tilde{D}_{23}^2+\tilde{E}_{23}^2}\cdot\cos(\lambda\pi+\beta_{23})\,|\left(1+O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right)(1+o(1))$.

Доказательство. Из формул (8), (8′) следует, что χ_{1j} можно представить в виде $\chi_{1j}=\lambda^{N_1}(\tilde{A}_{11}+\sqrt{\tilde{B}_{11}^2+\tilde{C}_{11}^2}\cdot\cos(2\lambda\pi+\alpha_{11}))\left[\varphi_{1j}+\varphi_{2j}O\left(\frac{1}{\lambda}\right)+\varphi_{3j}O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)+\varphi_{4j}O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right](1+o(1))\ (j=1,2,3)$; $\varphi_{11}=1+\sqrt{\tilde{D}_{11}^2+\tilde{E}_{11}^2}\cdot\cos(\lambda\pi+\beta_{11})\,\Phi^{-1}$; $\varphi_{21}=\varphi_{11}-\tilde{a}_{11}\Phi^{-1}$; $\varphi_{31}=\varphi_{41}=0$; $\varphi_{12}=(\tilde{A}_{12}+\sqrt{\tilde{D}_{12}^2+\tilde{E}_{12}^2}\cdot\cos(\lambda\pi+\beta_{12}))\,\Phi^{-1}$; $\varphi_{22}=\varphi_{12}+(-\tilde{a}_{12}+2\sqrt{\tilde{B}_{11}^2+\tilde{C}_{11}^2}\cdot\cos(2\lambda\pi+\alpha_{11}))\,\Phi^{-1}$; $\varphi_{32}=2\sqrt{\tilde{B}_{11}^2+\tilde{C}_{11}^2}\cdot\cos(2\lambda\pi+\alpha_{11})\,\Phi^{-1}$; $\varphi_{42}=0$; $\varphi_{13}=(\tilde{A}_{13}+\sqrt{\tilde{D}_{13}^2+\tilde{E}_{13}^2}\cdot\cos(\lambda\pi+\beta_{13}))\,\Phi^{-1}$; $\varphi_{23}=\varphi_{13}-\tilde{a}_{13}\Phi^{-1}$; $\varphi_{33}=\varphi_{43}=\sqrt{\tilde{B}_{11}^2+\tilde{C}_{11}^2}\cdot\cos(2\lambda\pi+\alpha_{11})\,\Phi^{-1}$; $\Phi=\tilde{A}_{11}+\sqrt{\tilde{B}_{11}^2+\tilde{C}_{11}^2}\cdot\cos\times(2\lambda\pi+\alpha_{11})$. (Здесь принято во внимание, что $\tilde{B}_{11}=\lambda\tilde{C}_{12}/2=-\lambda^2\tilde{B}_{13},\ \tilde{C}_{11}=-\lambda\tilde{B}_{12}/2=-\lambda^2\tilde{C}_{13}$). Аналогично $\chi_{3j}=\lambda^{N_2}(\tilde{A}_{23}+\sqrt{\tilde{D}_{23}^2+\tilde{E}_{23}^2}\cdot\cos(\lambda\pi+\beta_{23}))\left[\psi_{1j}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\psi_{2j}\right](1+o(1))$, где $\psi_{1j}=$

$$=\frac{\tilde{A}_{2j}+\sqrt{\tilde{D}_{2j}^2+\tilde{E}_{2j}^2}\cdot\cos(\lambda\pi+\beta_{2j})}{\tilde{A}_{23}+\sqrt{\tilde{D}_{23}^2+\tilde{E}_{23}^2}\cdot\cos(\lambda\pi+\beta_{23})};\ \psi_{2j}=$$

$= \psi_{1j} - \dfrac{\tilde{a}_{2j}}{\tilde{A}_{23} + \sqrt{\tilde{D}_{23}^2 + \tilde{E}_{23}^2} \cos(\lambda\pi + \beta_{23})}$. Функции φ_{ij} и ψ_{kj} ($i = 1, 2, 3, 4$; $k = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$) мероморфны, периодичны с периодом 2 и имеют конечные пределы при $\operatorname{Im}\lambda \to \pm\infty$. Следовательно, $C_2^1 < |\varphi_{ij}| < C_1^1$, $C_2^2 < |\psi_{ij}| < C_1^2$, когда $\lambda \in \gamma_n = \gamma \pm 2n\pi$ ($n = 0, 1, \ldots$); γ — произвольная кривая, лежащая в полосе $0 < \operatorname{Re}\lambda < 2$ и не проходящая через нули и полюсы функций φ_{ij} и ψ_{kj}. Если же провести γ так, чтобы она, кроме того, не проходила через нули функций $\cos\lambda\pi$ и $\sin\lambda\pi$, то при $\lambda \in \gamma_n$ $|\chi_{1j}| > |\lambda|^{N_1} |\tilde{A}_{11} + \sqrt{\tilde{B}_{11}^2 + \tilde{C}_{11}^2} \cos(2\lambda\pi + \alpha_{11})| \cdot |\varphi_{1j} + \sum_{k=1}^{3} \varphi_{k+1,j} \cdot O\left(\frac{1}{\lambda^k}\right)| (1 + o(1)) > m_1 |\lambda|^{N_1} e^{2|\operatorname{Im}\lambda\pi|} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right)(1 + o(1))$; $|\chi_{1j}| < M_1 |\lambda|^{N_1} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right) e^{2|\operatorname{Im}\lambda\pi|} (1 + o(1))$; $|\chi_{3j}| > m_2 |\lambda|^{N_2} e^{|\operatorname{Im}\lambda\pi|} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right)(1 + o(1))$; $|\chi_{3j}| M_2 |\lambda|^{N_2} e^{|\operatorname{Im}\lambda\pi|} \times \left(1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right)(1 + o(1))$. Очевидно, что полученная оценка верна и на прямых $\operatorname{Im}\lambda = \pm 2n\pi$ (где n таково, что соответствующая прямая не проходит через нули и полюсы функций φ_{ij} и ψ_{kj}). Таким образом, построена система расширяющихся контуров Γ_n, состоящих из кусков кривых $\gamma_n = \gamma \pm 2n\pi$ и отрезков прямых $\operatorname{Im}\lambda = \pm 2n\pi$, не проходящих через нули и полюсы функций φ_{ij} и ψ_{kj} и через нули функций $\cos\lambda\pi$ и $\sin\lambda\pi$, на которых верна требуемая оценка. Тем самым лемма доказана.

Лемма 2. *На построенной системе контуров имеет место оценка* $|\chi(\lambda)| > c |\tilde{A}_{11} + \sqrt{\tilde{B}_{11}^2 + \tilde{C}_{11}^2} \cos(2\lambda\pi + \alpha_{11})|^2 \cdot |\lambda|^{2(N_1+N_2)} \times |\tilde{A}_{23} + \sqrt{\tilde{D}_{23}^2 + \tilde{E}_{23}^2} \cos(\lambda\pi + \beta_{23})|^2 \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right)(1 + o(1))$.

Доказательство. Действительно, после вынесения из элементов $\det[\chi_{ij}]$ главных членов, получаем при $\lambda \in \Gamma_n$ $\chi(\lambda) = \lambda^{2(N_1+N_2)} (\tilde{A}_{11} + \sqrt{\tilde{B}_{11}^2 + \tilde{C}_{11}^2} \cos(2\lambda\pi + \alpha_{11}))^2 \cdot (\tilde{A}_{23} + \sqrt{\tilde{D}_{23}^2 + \tilde{E}_{23}^2} \times \cos(\lambda\pi + \beta_{23}))^2 \varphi(\lambda)(1 + o(1))$, где $\varphi(\lambda) = \varphi_0 + \sum_{r=1}^{6} \varphi_r O\left(\frac{1}{\lambda^r}\right)$, φ_0 и φ_r ($r = 1, \ldots, 6$) — мероморфные, периодические функции, имеющие конечные пределы при $\operatorname{Im}\lambda \to \pm\infty$, причем $\lim_{\operatorname{Im}\lambda \to \pm\infty} \varphi(\lambda) = 1$. И, значит, на контурах Γ_n, удовлетворяющих условию леммы 1, имеет место оценка $|\chi(\lambda)| > c|\lambda|^{2(N_1+N_2)} |\tilde{A}_{11} + \sqrt{\tilde{B}_{11}^2 + \tilde{C}_{11}^2} \times \cos(2\lambda\pi + \alpha_{11})|^2 \cdot |\tilde{A}_{23} + \sqrt{\tilde{D}_{23}^2 + \tilde{E}_{23}^2} \cos(\lambda\pi + \beta_{23})|^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right) \times (1 + o(1))$ и лемма доказана.

Доказательство теоремы. Удалим из множества собственных и присоединенных функций любые $N_1 + N_2$ функций, отвечающие характеристическим значениям $\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_{N_1+N_2}}$. Предположим, что функция $f(x) \in L^2[0, 3\pi]$ ортогональна оставшемуся множеству функций. Положим $\omega_j(\lambda, f) = \int\limits_0^{3\pi} \omega_j(\lambda, x) f(x)\,dx$, $W_j(\lambda, f) = \prod\limits_{i=1}^{N_1+N_2} (\lambda - \lambda_{k_i})\,\omega_j(\lambda, f)$ $(j = 1, 2)$, где функции $\omega_j(\lambda, x)$ определены формулами (6). Тогда функции $W_j(\lambda, f)$ будут иметь во всех характеристических точках нули, кратности которых не меньше кратностей соответствующих характеристических чисел. Следовательно, функции $\frac{W_j(\lambda, f)}{\chi(\lambda)}$ $(j = 1, 2)$ являются целыми. Оценим их модуль при $|\lambda| \to \infty$: $|\omega_1(\lambda, f)| = |C(\lambda, f)(\chi_{31} \cdot \chi_{13} - \chi_{11}\chi_{33}) + S(\lambda, f)(\chi_{11} \cdot \chi_{32} - \chi_{12} \cdot \chi_{31})| < |C(\lambda, f)|(|\chi_{31}| \cdot |\chi_{13}| + |\chi_{11}| \cdot |\chi_{33}|) + |S(\lambda, f)|(|\chi_{12}| \cdot |\chi_{31}| + |\chi_{11}| \cdot |\chi_{32}|)$; $(C(\lambda, f) = \int\limits_0^{3\pi} C(\lambda, x) f(x)\,dx$, $S(\lambda, f) = \int\limits_0^{3\pi} S(\lambda, x) f(x)\,dx$. Учитывая теперь лемму 1 и оценку $|S(\lambda, f)| = |C(\lambda, f)| = o(e^{3|\mathrm{Im}\lambda\pi|})$, вытекающую из наличия операторов преобразования, получаем $|\omega_1(\lambda, f)| < o(e^{3|\mathrm{Im}\lambda\pi|}) \cdot c_1 |\tilde{A}_{11} + \sqrt{\tilde{B}_{11}^2 + \tilde{C}^1{}_1} \cos(2\lambda\pi + \alpha_{11})| \cdot |\tilde{A}_{23} + \sqrt{\tilde{D}_{23}^2 + \tilde{E}_{23}^2} \cdot \cos(\lambda\pi + \beta_{23})| \cdot |\lambda|^{N_1+N_2} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right)(1 + o(1))$ при $\lambda \in \Gamma_n$, где Γ_n — построенные в лемме 1 контуры. Аналогично $|\omega_2(\lambda, f)| < o(e^{3|\mathrm{Im}\lambda\pi|}) \cdot c_2 |\tilde{A}_{11} + \sqrt{\tilde{B}_{11}^2 + \tilde{C}_{11}^2} \cos(2\lambda\pi + \alpha_{11})| \cdot |\tilde{A}_{23} + = \sqrt{\tilde{D}_{23}^2 + \tilde{E}_{23}^2} \cdot \cos(\lambda\pi + \beta_{23})| \cdot |\lambda|^{N_1+N_2} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right)(1 + o(1))$ при $\lambda \in \Gamma_n$.

Из этих оценок и леммы 2 легко получить теперь, что $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{\lambda \in \Gamma_n} \left|\frac{W_j(\lambda, f)}{\chi(\lambda)}\right| = 0$, откуда в силу теоремы Лиувилля следует, что $W_j(\lambda, f) \equiv 0$, или

$$\omega_1(\lambda, f) \equiv 0, \ \omega_2(\lambda, f) \equiv 0- \tag{10}$$

Рассматривая уравнения (10) как систему относительно неизвестных $C(\lambda, f)$ и $S(\lambda, f)$ и учитывая, что определителем ее является характеристическая функция $\chi(\lambda) \not\equiv 0$, получаем, что $C(\lambda, f \equiv S(\lambda, f) \equiv 0$. Тогда по теореме единственности для преобразования Фурье $f(x) = 0$ почти всюду. Следовательно, в пространстве $L^2[0, 3\pi]$ не существует отличной от нуля функции, ортогональной рассматриваемому семейству функций. Теорема доказана.

Поступила 1 сентября 1977 г.