УДК 512.83:512.87

Е. М. РУССАКОВСКИЙ

О ГАНКЕЛЕВЫХ И ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦАХ И БЕЗУТИАНТЕ. I

В статье формулируется критерий обратимости ганкелевых и теплицевых матриц, указывается способ построения обратных к ним матриц.

При изучении ганкелевых матриц используется их связь с безутиантами. Результаты, полученные для ганкелевых матриц, переносятся с соответствующими изменениями на теплицевы матрицы.

1. Определения и обозначения. Пусть $(0 \not\equiv) h(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} d_i \lambda^i$ — комплексный многочлен формальной степени n, истинную степень которого обозначим через $\deg h$. Каждый такой многочлен имеет ровно n корней (с учетом кратности), если учитывать корень $\lambda = \infty$ в случае, когда $\deg h < n$.

Пусть $f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} x_i\lambda^i$ и $g(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} y_i\lambda^i$ — два комплексных многочлена формальной степени n, хотя бы один из которых не равен нулю тождественно. Обозначим через $m_{f,g}$ количество общих (конечных и бесконечных) корней многочленов $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$, подсчитанное с учетом кратности.

Обозначим через $R(\lambda)$ рациональную дробь $f(\lambda)/g(\lambda)$, если $\deg f \leqslant \deg g$, и $-g(\lambda)/f(\lambda)$, если $\deg f > \deg g$. Пусть $l_{f,g}$ — степень рациональной дроби $R(\lambda)$ в ее несократимом представлении. Очевидно, что $l_{f,g} = n - m_{f,g}$. Представим $R(\lambda)$ в виде ряда $R(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} (s_i/\lambda^i)$. Ганкелеву матрицу $(s_{i+j-1})_{i,j=1}^{n}$ обозначим через $S^{f}{}_{,g}$. Результантом многочленов $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ назовем определитель матрицы $R_{f,g}$ порядка $2n$

$$R_{f,g} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{\tilde{X}} & \tilde{\tilde{Y}} \\ \hline \tilde{X} & \tilde{Y} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} x_n & 0 & \cdots & 0 & y_n & 0 & \cdots & 0 \\ x_{n-1} & x_n & \cdots & 0 & y_{n-1} & y_n & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \hline x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} & y_0 & y_1 & \cdots & y_{n-1} \\ 0 & x_0 & \cdots & x_{n-2} & 0 & y_0 & \cdots & y_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & x_0 & 0 & 0 & \cdots & y_0 \end{array}\right) \qquad (1)$$

(блоки $\tilde{\tilde{X}}$, $\tilde{X}$, $\tilde{\tilde{Y}}$, $\tilde{Y}$ — матрицы размеров $n \times n$). Как известно, результант обращается в нуль тогда и только тогда, когда многочлены $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ имеют хотя бы один общий (конечный или бесконечный) корень.

Безутиантой многочленов $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ назовем матрицу $B_{f,g}$ порядка n

$$B_{f,g} = \left(\sum_{l=\max(0,\, i+j-n-1)}^{l=\min(i,\, j)-1} \begin{vmatrix} x_{n-l} & x_{n+l-i-j+1} \\ y_{n-l} & y_{n+l-i-j+1} \end{vmatrix} \right)_{i,j=1}^{n} \qquad (2)$$

(эта матрица лишь обратным порядком строк и столбцов отличается от безутианты, определенной в работе [1, с. 13]). Очевидно, что $B_{f,g}^{t} = B_{f,g}$ (значок t означает транспонирование).

Пусть $x = \{x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0\}$, $y = \{y_n, y_{n-1}, \ldots, y_0\}$. Обозначим через $T_{x,y}$ матрицу порядка $2n-1$

$$T_{x,y}=(t_{i,j})_{i,j=1}^{n}=\left(\begin{array}{cc:cc:c}
\begin{vmatrix} x_n x_{n-1} \\ y_n y_{n-1} \end{vmatrix} & x_n & 0 & y_n & 0 \\
\cdots\cdots & \cdots & & & \\
\begin{vmatrix} x_n x_1 \\ y_n y_1 \end{vmatrix} & x_2 & x_n & y_2 & y_n \\
 & & \cdots & & \\
\begin{vmatrix} x_n x_0 \\ y_n y_0 \end{vmatrix} & x_1 & x_2 & y_1 & y_2 \\
0 & x_0 & x_1 & y_0 & y_1 \\
0 & 0 & x_0 & 0 & y_0
\end{array}\right). \qquad (3)$$

Пусть Δ_i — алгебраическое дополнение элемента $t_{i,1}$ в матрице $T_{x,y}$. Ганкелеву матрицу $((-1)^{[n/2]+n+1}\cdot\Delta_{i+j-1})_{i,j=1}^{n}$ обозначим через $\Delta_{f,g}$.

Известно, что при умножении на матрицу $J=(\delta_{i,n-j+1})_{i,j=1}^{n}$ ($\delta_{r,s}$ — символ Кронекера) слева или справа ганкелевы матрицы переходят в теплицевы, а теплицевы — в ганкелевы [2, гл. IV]. Эти соображения в дальнейшем используются для получения двойственных утверждений о теплицевых матрицах из соответствующих утверждений о ганкелевых матрицах (доказательства двойственных утверждений не приводятся).

2. Некоторые предложения о безутианте. В этом пункте приведены краткие доказательства по существу известных предложений о безутианте, которые впоследствии используются при доказательстве теорем обращения.

Предложение 1. *Безутианта $B_{f,g}$ допускает следующие представления:*

$$B_{f,g}=\tilde{\tilde{X}}J\tilde{Y}^{t}-\tilde{\tilde{Y}}J\tilde{X}^{t},\ B_{f,g}=\tilde{Y}J\tilde{\tilde{X}}^{t}-\tilde{X}J\tilde{\tilde{Y}}^{t} \qquad (4)$$

(см. п. 1; ср. с [3, с. 71—72]).

Доказательство. Нетрудно проверить, что матрицы $R_{f,g}$ и $B_{f,g}$ связаны соотношением

$$R_{f,g}\left(\begin{array}{c:c} 0 & J \\ \hdashline -J & 0 \end{array}\right)R_{f,g}^{t}=\left(\begin{array}{c:c} 0 & B_{f,g} \\ \hdashline -B_{f,g} & 0 \end{array}\right). \qquad (5)$$

Из соотношений (1), (5) и симметричности безутианты следует справедливость предложения 1.

Предложение 2. *Ранг и дефект безутианты $B_{f,g}$ равны соответственно $l_{f,g}$ и $m_{f,g}$* (см. п. 1).

Доказательство. Используя работу [1, с. 14], получаем, что у матриц $B_{f,g}$ и $S_{f,g}$ ранги и дефекты совпадают. Остается заметить, что ранг и дефект матрицы $S_{f,g}$ равны соответственно $l_{f,g}$ и $m_{f,g}$ [4, гл. XVI, § 10].

Предложение 3. *Определитель безутианты $B_{f,g}$ равен $(-1)^{[n/2]}\cdot\det R_{f,g}$.*

Доказательство. Из соотношения (5) следует, что $\det B_{f,g}=c(n)\cdot\det R_{f,g}$, где $|c(n)|=1$. Нетрудно проверить, что $c(n)=(-1)^{[n/2]}$ [см. также 3, с. 72—73].

Следствием предложения 2 и предложения 3 является

Предложение 4. *Безутианта $B_{f,g}$ невырожденная тогда и только тогда, когда многочлены $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ не имеют общих (конечных или бесконечных) корней.*

Предложение 5. *Матрица $\hat{B}_{f,g}$, присоединенная к безутианте $B_{f,g}$, есть ганкелева матрица $\Delta_{f,g}$.*

Докажем предварительно следующую лемму:

Лемма 1. *Пусть заданы набор $\{x, y\}=\{x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_0\}$ и число δ. Обозначим через v $(2n-1)$-мерную вектор-строку $(\delta, 0, 0, \ldots, 0)$. Если $u=(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_{2n-1})$ — некоторое решение системы $2n-1$ линейных уравнений с $2n-1$ неизвестными*

$$u\cdot T_{x,y}=v, \tag{6}$$

$\tilde{U}$ — ганкелева матрица $(\tilde{u}_{i+j-1})_{i,j=1}^{n}$, $B_{f,g}$ — безутианта многочленов $f(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{n}x_i\lambda^i$ и $g(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{n}y_i\lambda^i$, E_n — единичная матрица порядка n, то

$$\tilde{U}B_{f,g}=\delta E_n. \tag{7}$$

Доказательство леммы 1. Подставим в систему (6) $\tilde{u}_i$ вместо u_i $(i=1, 2, \ldots, 2n-1)$. Из полученных соотношений нетрудно вывести следующие:

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{u}_i\begin{vmatrix}x_n & x_{n-i}\\ y_n & y_{n-i}\end{vmatrix}=\delta, \tag{8}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\tilde{u}_{i+k-1}\begin{vmatrix}x_{n-i} & x_j\\ y_{n-i} & y_j\end{vmatrix}=0 \quad (j=0, 1, \ldots, n;\ k=2, 3, \ldots, n).$$

Используя соотношения (8), нетрудно проверить, что

$$\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{l=\max(0,\, i+s-n-1)}^{l=\min(i,\, s)-1}\tilde{u}_{r+i-1}\begin{vmatrix}x_{n-l}x_{n+l-i-s+1}\\ y_{n-l}y_{n+l-i-s+1}\end{vmatrix}=\delta\delta_{r,s}$$

$(r=1, 2, \ldots, n;\ s=1, 2, \ldots, n)$, т. е. выполняется соотношение (7).

Лемма 1 доказана.

Доказательство предложения 5. Нетрудно проверить, что при $\delta = (-1)^{n+1} \det R_{f,g}$ система уравнений (6) имеет решение $u_i = \Delta_i$ $(i = 1, 2, \dots, 2n-1)$. По лемме 1 имеем: $(\Delta_{i+j-1})_{i,j=1}^n B_{f,g} = (-1)^{n+1} \det R_{f,g} E_n$, откуда

$$\Delta_{f,g} B_{f,g} = (-1)^{[n/2]} \det R_{f,g} E_n = \det B_{f,g} E_n. \tag{9}$$

Из соотношения (9) следует справедливость доказываемого утверждения для случая невырожденной безутианты. Используя соображения непрерывности, распространяем доказанное на вырожденные безутианты. Впрочем, для случая вырожденной безутианты можно привести и чисто алгебраическое доказательство.

Предложение 6. *Матрица $\hat{U}$, присоединенная к ганкелевой матрице $U = (u_{i+j-1})_{i,j=1}^n$, может быть представлена в виде безутианты $B_{f,g}$ многочленов $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ формальной степени n.*

Предварительно сформулируем следующую лемму:

Лемма 2. *Пусть заданы $(2n-1)$ — мерная вектор-строка $u = (u_1, u_2, \dots, u_{2n-1})$ и число δ. Обозначим через v $(2n-1)$-мерную вектор-строку $(\delta, 0, 0, \dots, 0)$.*

Если $\{x, y\} = \{\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n-1}, \dots, \tilde{x}_0, \tilde{y}_n, \tilde{y}_{n-1}, \dots, \tilde{y}_0\}$ — некоторое решение системы $2n-1$ уравнений с $2n+2$ неизвестными $x_n, x_{n-1}, \dots, x_0, y_n, y_{n-1}, \dots, y_0$

$$u \cdot T_{x,y} = v, \tag{10}$$

U — ганкелева матрица $(u_{i+j-1})_{i,j=1}^n$, $B_{f,g}$ — безутианта многочленов $f(\lambda) = \sum_{i=0}^n \tilde{x}_i \lambda^i$ и $g(\lambda) = \sum_{i=0}^n \tilde{y}_i \lambda^i$, то

$$UB_{f,g} = \delta E_n. \tag{11}$$

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

Доказательство предложения 6. Рассмотрим систему уравнений (10) при $\delta = \det U$. Покажем, что если $\det U \neq 0$, то система (10) разрешима.

Пусть $x_n, x_{n+1}, y_n, y_{n+1}$ — некоторые числа, связанные соотношением $\begin{vmatrix} \tilde{x}_n \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_n \tilde{y}_{n+1} \end{vmatrix} = \det U$. Обозначим через z_x n-мерный вектор-столбец $(\tilde{x}_{n+1}, -u_1\tilde{x}_n, -u_2\tilde{x}_n, \dots, -u_{n-1}\tilde{x}_n)^t$, через z_y — вектор-столбец $(\tilde{y}_{n+1}, -u_1\tilde{y}_n, -u_2\tilde{y}_n, \dots, -u_{n-1}\tilde{y}_n)^t$. Рассмотрим две системы n линейных уравнений с n неизвестными

$$U\vec{x} = z_x, \ U\vec{y} = z_y, \tag{12}$$

где $\vec{x} = (x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0)^t$, $\vec{y} = (y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_0)^t$. Так как $\det U \neq 0$, системы (12) имеют решения $\vec{x} = (\tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_{n-2}, \dots, \tilde{x}_0)^t$,

$\vec{y} = (\tilde{y}_{n-1}, \tilde{y}_{n-2}, \ldots, \tilde{y}_0)^t$. Заметим, что тогда набор $\{x, y\} = \{\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n-1}, \ldots \tilde{x}_0, \tilde{y}_n, \tilde{y}_{n-1}, \ldots, \tilde{y}_0\}$ — решение системы (10).

Пусть $B_{f, g}$ — безутианта многочленов $f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{x}_i \lambda^i$ и $g(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{y}_i \lambda^i$. По лемме 2 имеем $UB_{f, g} = \det UE_n$. Поскольку $\det U \neq 0$, отсюда следует, что $\hat{U} = B_{f, g}$. Используя соображения непрерывности, распространяем доказанное на вырожденные ганкелевы матрицы. Впрочем, для вырожденных ганкелевых матриц нетрудно дать чисто алгебраическое доказательство предложения 6, если заметить, что любая симметрическая матрица ранга не более 1 может быть представлена в виде безутианты двух многочленов.

Следствием предложений 5 и 6 является

Предложение 7. *Безутианты многочленов формальной степени n, не имеющих общих (конечных и бесконечных) корней, и только они, являются матрицами, обратными к невырожденным ганкелевым матрицам порядка n.*

Список литературы: 1. *Крейн М. Г., Неймарк М. А.* Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. Харьков, ДНТВУ, 1936. 44 с. 2. *Иохвидов И. С.* Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы. М., Наука, 1974. 264 с. 3. *Ландер Ф. И.* Безутианта и обращение ганкелевых и теплицевых матриц.— Мат. исследования, 1974, т. IX, вып. 2 (32), с. 69—87. 4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., Наука, 1967. 576 с.

Поступила 25 мая 1976 г.