УДК 517.55

Л. И. РОНКИН

О ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА, ГОЛОМОРФНОЙ НА НУЛЕВОМ МНОЖЕСТВЕ ПОЛИНОМА ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этой заметке для случая двух переменных будет показано, что функция, голоморфная на нулевом множестве полинома и в некотором смысле не быстро растущая на нем, допускает голоморфное продолжение в C^2 в существенном того же роста. Доказательство соответствующей теоремы основано на применении одной из теорем Хермандера о разрешимости так называемой $\bar{\partial}$ — проблемы. Схема использования этих теорем хорошо известна, однако ее реализация в каждом конкретном случае достаточно индивидуальна.

Введем необходимые обозначения и определения. Пусть $P(z)$, $z=(z_1, z_2)$ — полином степени m от переменных $z_1 \in \boldsymbol{C}$, $z_2 \in \boldsymbol{C}$, и пусть $\Lambda_P = \{z : P(z) = 0\}$. Пусть далее $f(z)$, $z \in \Lambda_P$ — функция, голоморфная на Λ_P. Напомним, что это означает существование для каждой точки z^0 такой ее окрестности v_{z^0} в $\boldsymbol{C}^2$ и такой функции $f_{z^0}(z)$ голоморфной в v_{z^0}, что $f_{z^0}(z) = f(z)$, $\forall z \in \Lambda_P \cap v_{z^0}$.

Обозначим $M_f(r;\ \Lambda_P) = \sup\limits_{z \in \Lambda_P,\ |z|<r} |f(z)|$. Назовем функцию $f(z)$ функцией конечного порядка ρ на Λ_P, если $\lim\limits_{r\to\infty}(\ln r)^{-1}\ln\ln M_f(r;\ \Lambda_P) = \rho < \infty$. Тип $\sigma_f(\Lambda_P,\ \rho(r))$ функции $f(z)$ при уточненном порядке* $\rho(r)$ определим равенством $\sigma_f(\Lambda_P,\ \rho(r)) = \varlimsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{\ln M_f(r;\ \Lambda_P)}{r^{\rho(r)}}$. Тип $\sigma(F,\ \rho(r))$ целой функции $F(z)$ при уточненном порядке $\rho(r)$ определяется равенством $\sigma(F,\ \rho(r)) = \varlimsup\limits_{r\to\infty} r^{-\rho(r)}\ln M_F(r)$, где $M_F(r) = \sup\limits_{|z|\leqslant r} |f(z)|$.

Теорема. *Пусть $P(z)$ — полином от двух комплексных переменных, и пусть голоморфная на Λ_P функция $f(z)$ имеет конечный порядок $\rho > 0$. Пусть далее $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r) = \rho$, — уточненный порядок. Тогда существует целая функция $F(z)$ такая, что* $\Phi(z) = f(z)$, $\forall z \in \Lambda_P$; $\sigma(F,\ \rho(r)) = \sigma_f(\Lambda_P,\ \rho(r))$.

Доказательство. Вначале мы докажем существование продолжения с оценкой функции $f(z)$ в области $G_1 = \{z : |z_1| < \infty,$ $|z_2| > R\}$, где R достаточно велико, затем будет доказано существование продолжения функции $f(z)$ в область $G_2 = \{z : |z_1| < \infty,$ $|z_2| > 2R\}$, после чего искомая функция будет получена «склейкой» указанных двух продолжений.

Предварительно сделаем несколько замечаний. Легко видеть, что систему координат в $\boldsymbol{C}^2$ можно выбрать так, чтобы полином $P(z)$ имел вид $P(z) = z_1^m + a_1(z_2)\, z_1^{m-1} + \cdots + a_m(z_2)$. Дискриминант полинома $P(z)$, очевидно, также являющийся полиномом, обозначим через $D_P(z_2)$. Известно [см., например, 3], что для любого полинома P существует такой полином Q с $D_Q(z_2) \not\equiv 0$, что $\Lambda_P = \Lambda_Q$. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $D_P(z_2) \not\equiv 0$. Выберем тогда число R столь большим, чтобы в круге $|W| < R/2$ содержались все корни полинома $P_P(z_2)$. Обозначим через $z_1^{(1)}(z_2), \ \ldots, \ z_1^{(m)}(z_2)$ корни уравнения $D(z_1,\ z_2) = 0$ (способ

---

* Функция $\rho(r)$, $r > 0$, стремящаяся при $r \to \infty$ к некоторому ρ, $0 \leqslant \rho < \infty$, называется уточненным порядком, если она непрерывно дифференцируема и $\lim\limits_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r = 0$. Подробнее об уточненных порядках см., например, [1; 2].

нумерации произволен) и оценим $\inf_{i \neq j} |z_1^{(j)}(z_2) - z_1^{(i)}(z_2)|$ при $|z_2| \geqslant R/2$. Для этого в первую очередь заметим, что $D_P(z_2)$ есть полином от z_2 некоторой степени n не выше $m(2m-1)$ и, следовательно, существуют такие положительные константы* C_1 и C_2, что при $|z_2| \geqslant R/2$ имеет место неравенство $C_1 |z_2|^n \leqslant |D_P \times (z_2)| \leqslant C_2 |z_2|^n$. Далее, функции $a_j(z_2)$, $j = 1, \ldots, m$ являются полиномами от z_2 степени не выше $m - j$ и значит при $|z_2| \geqslant R$ и любом j справедлива оценка $|a_j(z_2)| \leqslant C_3 |z_2|^m$, откуда в свою очередь следует, что $|z_1^{(j)}(z_2)| \leqslant |a_1(z_2)| + \cdots + |a_m \times (z_2)| \leqslant C_4 |z_2|^m$, $j = 1, \ldots, m$. Используя это неравенство и учитывая представление $D_P(z_2) = \prod_{i<j} (z_1^{(j)}(z_2) - z_1^{(i)}(z_2))^2$, заключаем, что при любом $j = 1, \ldots, m$,

$$|z_1^{(j)}(z_2) - z_1^{(i)}(z_2)| =$$

$$= \sqrt{|D_P(z_2)|} \Big(\prod_{\substack{\mu < \nu \\ (\mu - i)^2 + (\nu - j)^2 \neq 0}} |z_1^{(\mu)}(z_2) - z_1^{(\nu)}(z_2)| \Big)^{-1} \geqslant$$

$$\geqslant C_5 |z_2|^{-N}, \tag{1}$$

где $N = \left| \frac{m^2}{2}(m-1) - 1 - \frac{n}{2} \right|$.

Построим теперь некоторую вспомогательную функцию $\Phi_1(z)$, голоморфную в окрестности множества $\Lambda_P \cap G_1$ и совпадающую на $\Lambda_P \cap G_1$ с функцией $f(z)$. Заметим прежде всего, что поскольку круг $|z_2| < R/2$ содержит все корни дискриминанта $D_P(z_2)$, то для любого z_2^0, $|z_2^0| > R/2$, существует $\delta(z_2^0) > 0$ такое, что в круге $|z_2 - z_2^0| > \delta(z_2^0)$ корни $z_1^{(j)}(z_2)$ полинома $P(z_1, z_2)$ после некоторой их перенумерации становятся голоморфными функциями от z_2. Обозначим эти функции через $z_1^{(j)}(z_2; z_2^0)$, $j = 1, \ldots, m$. Нетрудно видеть, что $\delta(z_2^0)$ можно считать удовлетворяющим условию $\delta(z_2^0) \geqslant |z_2^0| - R/2$.

Функцию $\Phi_1(z)$ определим следующим образом: $\Phi_1(z) = 0$, когда $\inf_j |z_1 - z_1^{(j)}(z_2)| > \frac{1}{2} C_5 |z_2|^{-N}$, а если $|z_1 - z_1^{(j)}(z_2)| \leqslant \frac{1}{2} \times C_5 |z_2|^{-N}$, то $\Phi_1(z) = f(z_1^{(j)}(z_2), z_2)\, \eta(2C_5^{-1}(z_1 - z_1^{(j)}(z_2)) |z_2|^N)$, где функция $\eta \in C^\infty(\boldsymbol{C})$ и удовлетворяет условиям: $\eta(\xi) = 0$ при $|\zeta| = 1$, $\eta(\zeta) = 1$ при $|\zeta| \leqslant 1/2$ и $0 \leqslant \eta(\zeta) \leqslant 1$ при $1/2 \leqslant |\zeta| \leqslant 1$.

Это определение корректно, поскольку ввиду выражения (1) точка z_1 не может одновременно принадлежать двум из кругов $|z_1 - z_1^{(j)}(z_2)| \leqslant \frac{1}{2} C_5 |z_2|^{-N}$. Заметим также, что из определения функции $\varphi_1(z)$ вытекает независимость ее от способа нумерации корней

---

* И далее через C_3, C_4, ..., обозначаются (уже без пояснения) положительные константы.

$z_1^{(j)}(z_2)$. Поэтому при $|z_2 - z_2^0| < \delta(z_2^0)$ справедливо представление

$$\Phi_1(z) = \sum_{j=1}^{m} f(z_1^{(j)}(z_2;\ z_2^0),\ z_2)\,\eta(2C_5^{-1}(z_1 - z_1^{(j)}(z_2;\ z_2^0))\,|z_2|^N) \qquad (2)$$

и, значит, $\Phi_1 \in C^\infty(G_1)$. Из формулы (2) также следует, что в области $\{z : |z_1| > R,\ \inf\limits_j |z_1 - z_1^{(j)}(z_2)| < \frac{1}{4} C_5 |z_2|^{-N}\}$, функция $\Phi_1(z)$ голоморфна. Кроме того, очевидно, что $\Phi_1(z) = f(z)$, $\forall z \in \Lambda_P \cap G_1$ и что при некотором $a > 0$ и всех $z \in G_1$

$$|\Phi_1(z)| \leqslant M_f(|z| + a;\ \Lambda_P). \qquad (3)$$

Функцию $F_1(z)$, являющуюся голоморфным продолжением функции $f(z)$ на всю область G_1 и удовлетворяющую необходимым оценкам, будем искать в виде $F_1 = \Phi_1 - Pu$. Необходимым и достаточным условием голоморфности функции $\Phi_1 - Pu$ является выполнение равенства $\bar\partial(\Phi_1 - Pu)$, откуда для функции u получаем уравнение

$$\bar\partial u = \frac{1}{P}\bar\partial\Phi_1. \qquad (4)$$

Заметим, что $\bar\partial\Phi_1 = 0$ в окрестности множества Λ_P и что $\bar\partial(P^{-1}\bar\partial\Phi_1) = 0$. Согласно известной теореме Хермандера [4, теорема 2.2.1] о разрешимости $\bar\partial$-проблемы решение уравнения (3) существует в пространстве $L^2(G_1,\ \varphi)$ измеримых функций с конечной нормой $\|u\|_{\varphi, G_1} = \left(\int\limits_{G_1} |u|^2 e^{-\varphi}\, d\omega\right)^{1/2}$, где φ — плюрисубгармоническая функция; $d\omega$ — элемент эвклидового объема в $\boldsymbol{C}^2$, как только выполнено условие $\|P^{-1}\bar\partial\Phi_1\|_{\varphi+\varkappa, G_1} < \infty$, где непрерывная функция $\varkappa(z)$ такова, что при любых $\lambda_j \in \boldsymbol{C}$, $j = 1,\ 2$, справедливо неравенство (в смысле распределений)

$$\sum_{i,\, j=1}^{2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_i \partial \bar z_j} \lambda_i \bar\lambda_j \geqslant e^{\varkappa} |\lambda|.$$

Заметим, что для функции $\varphi(z)$, представимой в виде $\varphi(z) = \alpha(z) + A\ln(1 + |z|^2)$, где постоянная $A > 1$, а функция $\alpha(z)$ плюрисубгармонична, можно взять $\varkappa(z) = -2\ln(1 + |z|^2)$, значит, в этом случае $\varphi + \varkappa = \alpha(z) + (A - 2)\ln(1 + |z|^2)$. Положим $\alpha(z) = 2\sigma_f |z|^{\tilde\rho(|z|)} + 2\theta(|z|)$ где: 1) $\tilde\rho(r)$ — уточненный порядок, эквивалентный* уточненному порядку $\rho(r)$ и удовлетворяющий дополнительному условию $\lim\limits_{r\to\infty} r^2\tilde\rho''(r)\ln r = 0$; 2) дифференцируемая

---

* Два уточненных порядка $\tilde\rho(r)$ и $\rho(r)$ называются эквивалентными, если $\lim\limits_{r\to\infty} r^{\tilde\rho(r)-\rho(r)} = 0$. Очевидно, что тип функции относительно эквивалентных уточненных порядков один и тот же.

функция $\theta(r)$ такова, что функция $\theta(|z|)$ плюрисубгармонична в C^2, $\lim_{r\to\infty}\theta(r)\, r^{-\tilde{\rho}(r)}=0$, и

$$\theta(r)\, r^{-\tilde{\rho}(r)} > \gamma(r) = \max\{0,\ \ r^{-\tilde{\rho}(r)} \ln M_f(r+a;\ \Lambda_P) - \sigma_f\}, \quad \forall r>0, \tag{5}$$

где a — то же, что и в выражении (3), $\sigma_f=\sigma_f(\Lambda_P,\ \rho(r)\}$. Существование таких функций $\tilde{\rho}(r)$ и $\theta(r)$ (для произвольного $\gamma(r)\to 0$) известно*. Непосредственно проверяется, что функция $|z|^{\tilde{\rho}(|z|)}$ плюрисубгармонична в C^2 и следовательно плюрисубгармонична в C^2 определенная выше функция $\alpha(z)$. Положим $\varphi_A(z)= =\alpha(z)+A\ln(1+|z|^2)=2\sigma_f|z|^{\tilde{\rho}(|z|)}+2\theta(|z|)+A\ln(1+|z|^2)$ и покажем, что при достаточно большом $A\, \|P^{-1}\bar{\partial}\Phi_1\|_{\varphi_A, G_1}<\infty$. Для этого прежде всего оценим $\left|\frac{\partial\Phi_1}{\partial\bar{z}_1}\right|$ и $\left|\frac{\partial\Phi_2}{\partial\bar{z}_2}\right|$. При $|z_2-\overset{0}{z_2}|< <\delta(z_2^0)$, $|z_1-z_1^{(j)}(z_2;\ z_2^0)|<\frac{1}{2}C_5|z_2|^{-N}$, учитывая представление (2) и неравенство (3), имеем

$$\left|\frac{\partial\Phi_1}{\partial\bar{z}_1}\right| = \left| f(z_1^{(j)}(z_2;\ z_2^0),\ z_2)\frac{\partial\eta}{\partial\bar{\zeta}}\frac{2}{C_5}|z_2|^N\right| \leqslant C_6 M_f(|z|+a;\ \Lambda_P). \tag{6}$$

Далее, обозначая для краткости $\zeta=\frac{2}{C_5}(z_1-z_1^{(j)}(z_2;\ z_2^0))\,|z_2|^N$, получаем, что

$$\left|\frac{\partial\Phi_1}{\partial\bar{z}_2}\right| = |f(z_1(z_2;\ z_2^0),\ z_2)|\left|\frac{\partial\eta}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}_2}+\frac{\partial\eta}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{z}_2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant C_7 M_f(|z|+a;\ \Lambda_p)\left(\left|\frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}_2}\right|+\left|\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{z}_2}\right|\right). \tag{7}$$

Оценим производные $\frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}_2}$ и $\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{z}_2}$. Имеем

$$\left|\frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}_2}\right| = \left|\frac{N}{C_5}(z_1-z_1^{(j)}(z_2;\ z_2^0))\, z_2\,|z_2|^{N-2}\right| \leqslant C_8|z|^N$$
$$\left|\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{z}_2}\right| \leqslant C_9\left(|z|^N\left|\frac{\partial\bar{z}_1^{(j)}}{\partial\bar{z}_2}\right|+|z|^N\right). \tag{8}$$

Для оценки производной от $z_1^{(j)}$ воспользуемся отмеченными выше оценками для $z_1^{(j)}$ и аналитичностью функций $z_1^{(j)}(z_2;\ z_2^0)$ в круге

---

* В работах [5; 3] приведено построение $\theta(r)$ для случая $\rho(r)\equiv\rho$, общий случай рассмотрен в работе [6], о $\tilde{\rho}(r)$ см., например, 7.

$|z_2 - z_2^0| \leqslant |z_2^0| - R/2$. Получим тогда, что $\left|\frac{\partial z_1^{(j)}(z_2;\ z_2^0)}{\partial \bar{z}_2}\right|_{z_2=z_2^0} \leqslant$ $\leqslant \frac{C_4}{|z_2^0| - \frac{R}{2}}\left(2|z_2^0| - \frac{R}{2}\right)^m$ и, следовательно, при $|z_2| > R$

$$\left|\frac{\partial z_1^{(j)}}{\partial \bar{z}_2}\right| \leqslant C_{10}|z|^m. \tag{9}$$

Из формул (6) — (9) заключаем, что

$$|\bar{\partial}\Phi_1| \leqslant C_{11}|z|^{N_1}M_f(|z| + a;\ \Lambda_P),\ N_1 = m + N. \tag{10}$$

Теперь оценим снизу $|P|$ при условии, что $|z_2| > R$, а z_1 лежит в одном из колец $\frac{1}{4}C_5|z_2|^{-N} < |z_1 - z_1^{(j)}(z_2)| < \frac{1}{2}C_5|z_2|^{-N}$, т. е. там, где может быть отличный от нуля $|\bar{\partial}\Phi_1|$. Имеем тогда

$$|P(z)| = \left|\prod_{j=1}^{m}(z_1 - z_1^{(j)}(z_2))\right| \geqslant C_{12}|z_2|^{-N_2},\ N_2 = mN_1. \tag{11}$$

Из формул (10), (11) и (15) следует, что при $A > 2(N_1 + N_2) + 4$ $\|P^{-1}\bar{\partial}\Phi_1\|_{\varphi_A, G_1} < \infty$. Следовательно, уравнение (3) имеет решение u, удовлетворяющее условию $\|u\|_{\varphi_{A+2}, G_1} < \infty$ и, как следствие, условию $\|z^m u(z)\|_{\varphi_{A'}, G_1} < \infty$ $(A' = A + 2 + 2m)$. Но тогда функция $F_1 = \Phi_1 - Pu$ является голоморфной в G_1, совпадающей с функцией f на $\Lambda_P \cap G_1$, и, как легко видеть,

$$\|F_1\|_{\varphi_{A'}, G_1} < \infty. \tag{12}$$

Построим теперь голоморфное продолжение функции f в область $G_2 = \{z : |z_1| < \infty,\ |z_2| < 2R\}$, обладающее конечной нормой $\|\cdot\|_{\varphi_{A'}, G_1}$. Для этого возьмем какую-либо функцию $B(z)$, являющуюся голоморфным продолжением функции f в области G_2, но, вообще говоря, не удовлетворяющую условиям, ограничивающим ее рост (существование такой функции следует из общей теоремы о продолжении с аналитического множества [см., например, 8, с. 313]), и положим затем

$$F_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R'}\frac{P(\zeta,\ z_2) - P(z_1,\ z_2)}{(\zeta - z_1)\,P(\zeta,\ z_2)}\,B(\zeta,\ z_2)\,d\zeta,$$

где R' выбрано так, чтобы полином $P(z)$ не обращался в ноль при $|z_1| \geqslant R'$, $|z_2| < 3R$. Очевидно, что функция $F_2(z)$ при каждом фиксированном z_1 является аналитической по z_2. Кроме того, при каждом фиксированном z_2, $|z_2| < 3R$, она является по z_1 полиномом степени не выше m, интерполирующем функцию B в корнях $z_1^{(j)}$ полинома $P(z_1,\ z_2)$. Поэтому функция $F_2(z)$ является голоморфным продолжением функции f в область $\{z : |z_1| < \infty, |z_2| < 3R\}$, и поскольку по z_1 она является полиномом степени не выше m, то выполнение условия

$$\| F_2 \|_{\varphi_{A'}, G_2} < \infty \tag{13}$$

очевидно.

Произведем «склейку» функций F_1 и F_2. Для этого прежде всего введем в рассмотрение функции $\eta_1 \in C^\infty(\boldsymbol{C})$ и $\eta_2 \in C^\infty(\boldsymbol{C})$ такие, что $\eta_1(\zeta) = 0$ при $|\zeta| > 7R/4$, $\eta_1(\zeta) = 1$ при $|\zeta| < 5R/4$, $0 \leqslant \eta_1(\zeta) \leqslant 1$, $\forall \zeta \in \boldsymbol{C}$, $\eta_1 + \eta_2 = 1$. Далее положим $Q(z) = \frac{F_1(z) - F_2(z)}{P(z)}$, $|z_1| < \infty$, $R < |z_2| < 2R$,

$$\alpha_1(z) = \begin{cases} Q(z)\,\eta_1(z_2) & \text{при } |z_1| < \infty,\ R < |z_2| < 2R; \\ 0 & \text{при } |z_1| < \infty,\ |z_2| > 2R; \end{cases}$$

$$\alpha_2(z) = \begin{cases} -Q(z)\,\eta_2(z_2) & \text{при } |z_1| < \infty,\ R < |z_2| < 2R; \\ 0 & \text{при } |z_1| < \infty,\ |z_2| < R. \end{cases}$$

Заметим, что $\| Q \|_{\varphi_{A'}, G_1 \cap G_2} < \infty$. Действительно, $\| Q \|^2_{\varphi_{A'}, G_1 \cap G_2} = \int\limits_{G_1 \cap G_2} |Q|^2 e^{-\varphi_{A'}}\, d\omega = \int\limits_{G'} + \int\limits_{G''} = I_1 + I_2$, где $G' = \{z : |z_1| > R',\ R < |z_2| < 2R\}$; $G'' = \{z : |z_1| < R',\ R < |z_2| < 2R\}$; R' — то же, что и прежде, т. е. такое, что $P(z) \neq 0$ при $|z_1| \geqslant R'$, $|z_2| < 3R$. В области G' величина $|P|$ отграничена от нуля, и, следовательно, $I_1 = \int\limits_{G'} |Q|^2 e^{-\varphi_{A'}}\, d\omega < C_{13} \int\limits_{G'} |F_1 - F_2|^2 e^{-\varphi_{A'}}\, d\omega$. Отсюда, учитывая выражения (12) и (13), заключаем, что $I_1 < \infty$. Выполнение условия $I_2 < \infty$ очевидно, и, таким образом, доказано, что

$$\| Q \|_{\varphi_{A'}, G_1 \cap G_2} < \infty. \tag{14}$$

Определим теперь в $\boldsymbol{C}^2$ внешнюю дифференциальную форму β, полагая

$$\beta = \begin{cases} \bar\partial \alpha_1 & \text{при } z \in G_1 \\ \bar\partial \alpha_2 & \text{при } z \in G_2. \end{cases}$$

Это определение корректно, поскольку в $G_1 \cap G_2$ $\bar\partial\alpha_1 = Q\bar\partial\eta_1 = -Q\bar\partial\eta_2 = \bar\partial\alpha_2$. Так как

$$\| \beta \|^2_{\varphi_{A'}, \boldsymbol{C}^2} = \int\limits_{\frac{5}{4} R < |z_2| < \frac{7}{4} R} |Q|^2 |\bar\partial\eta|^2 e^{-\varphi_{A'}}\, d\omega <$$

$$< C_{14} \int\limits_{\frac{5}{4} R < |z_2| < \frac{7}{4} R} |Q|^2 e^{-\varphi_{A'}}\, d\omega,$$

то $\| \beta \|_{\varphi_{A'}, \boldsymbol{C}^2} < \infty$ и согласно упоминавшейся уже теореме Хермандера существует функция $U(z)$ такая, что $\bar\partial U = \beta$ и

$$\| U \|_{\varphi_{A'+2}, \boldsymbol{C}^2} < \infty. \tag{15}$$

Обозначим $g_1 = U - \alpha_1$; $g_2 = U - \alpha_2$. Поскольку $\bar{\partial} g_i = \bar{\partial} U - \bar{\partial} \alpha_i = \beta - \bar{\partial} \alpha_i = 0$, $i = 1, 2$, то функции g_1 и g_2 являются аналитическими в соответствующих областях G_1 и G_2. Кроме того ввиду выражений (14) и (15) эти функции удовлетворяют условиям

$$\| g_j \|_{\varphi_{A'+2}, G_j} < \infty, \; j = 1, 2. \tag{16}$$

Наконец, $g_2(z) - g_1(z) = Q(z)$, $\forall z \in G_1 \cap G_2$, откуда следует, что на $G_1 \cap G_2$ $F_1 + Pg_1 = F_2 + Pg_2$ и, значит, равенствами $F(z) = F_1(z) + P(z) g_1(z)$, $\forall z \in G_1$; $F(z) = F_2(z) + P(z) g_2(z)$, $\forall z \in G_2$ корректно определена целая функция F. Из формул (16), (13) и (12) вытекает, что при $A'' = A' + 2 + m$ $\| F_j + Pg_j \|_{\varphi_{A''}, G_j} < \infty$, $j = 1, 2$ и, следовательно, $\| F \|_{\varphi_{A''}, C^2} < \infty$. Отсюда легко следует [см., например, 3, с. 322], что $\ln M_F(r) \leqslant C_{15} + \frac{1}{2} \sup\limits_{|z| < r+2} \varphi_{A''}(z) = C_{15} + \sigma_f (r+2)^{\tilde{\rho}(r+2)} + \theta(r+2)$. Учитывая выбор функций $\tilde{\rho}(r)$ и $\theta(r)$, заключаем, что $\sigma(F, \rho(r)) \leqslant \sigma_f$. Обратное неравенство очевидно. Следовательно, $\sigma(F, \rho(r)) = \sigma_f$. Теорема доказана.

Список литературы: **1.** *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат. 1956. 632 с. **2.** *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., Наука, 1970. 592 с. **3.** *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих комплексных переменных. М., Наука, 1971. 430 с. **4.** *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М., Мир, 1968. 279 с. **5.** *Martineau A.* Indicatrices de croissance des fonctions entières de *N* variables. — Invent. Math. Berlin, 1967, Bd3, p. 16-19. **6.** *Агранович П. З.* Индикаторы голоморфных функций многих переменных. Диссертация. Свердловск, 1978. 139 с. **7.** *Агранович П. З.* Существование голоморфной в угле функции с заданным индикатором. Препринт ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1977. 23 с. **8.** *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных, М., Мир, 1969. 351 с.

Поступила 14 ноября 1975 г.