УДК 519.9

А. Н. ПЛИЧКО

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННОГО M-БАЗИСА В WCG-ПРОСТРАНСТВЕ

Введение и обозначения

Пусть E — банахово пространство и E' — его сопряженное. Система $(x_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$, где $x_\alpha \in E$, $f_\alpha \in E'$, называется ограниченным базисом Маркушевича (M-базисом), если $f_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ (δ — символ Кронекера), (x_α) и (f_α) тотальны на E' и E соответственно и $\sup\limits_\alpha \| f_\alpha \| \| x_\alpha \| < \infty$. Банахово пространство E называют $\boldsymbol{WCG}$-пространством (weakly compactly generated), если оно порождается компактным в слабой топологии $\sigma(E, E')$ выпуклым уравновешенным подмножеством K, $[K] = E$. В частности, сепарабельное и рефлексивное пространства являются $\boldsymbol{VCG}$ — пространствами.

В этой статье мы дадим новое, более короткое доказательство леммы Амира — Линденштрауса [1, лемма 6] и, опираясь на него, покажем существование ограниченного M-базиса в $\boldsymbol{WCG}$-пространстве. Набросок доказательства этого факта с некоторыми пробелами изложен в работе [2]. Для сепарабельных банаховых пространств существование ограниченного M-базиса установлено [3], поэтому в дальнейшем будем считать пространство E несепарабельным.

Пусть E_0 — $\boldsymbol{WCG}$-пространство, порожденное слабо компактным множеством K. Поскольку слабо компактное множество ограничено, то, не нарушая общности, можно считать, что K — подмножество единичного шара $B_0(E_0)$ пространства E_0 и что существует элемент $x_\omega \in K$, $\| x_\omega \|_0 = 1$. Обозначим через $\| \ \|_1$ калибровочную функцию множества K, а через E_1 — нормированное пространство, полученное наделением линейной оболочки множества K нормой $\| \ \|_1$. Тогда $E_0' \subset E_1'$ [см. 4, с. 53].

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: $[M]_i$ — замкнутая по норме i ($i = 0, 1$) линейная оболочка множества M; $d_i(M, N)$ — расстояние (по норме i) между множествами M и N; $S_i(M) = \{x \in [M]_i : \| x \|_i = 1\}$; $M^\perp = \{f \in E_0' : f(M) \equiv 0\}$, если $M \subset E_0$ и $M^\perp = \{x \in E_0 : x(M) \equiv 0\}$, для $M \subset E_0'$; $\mathrm{dens}_i M$ — наименьшая мощность всюду плотных (по норме i) подмножеств множества M; $\overline{\overline{\alpha}}$ — мощность порядкового числа α; ω — первое бесконечное порядковое число.

Лемма 1. *Пусть X и F — подпространства E и E'. Если для всякого $x \in S(X)$ и $\varepsilon > 0$ существует $f \in S(F)$ такое, что $f(x) > \| f \| - \varepsilon$, то $d(S(X), F^{\perp}) = 1$.*

Доказательство очевидно.

Лемма 2. *Обозначим через $(E_0' \| \|_1)$ линейное многообразие $E_0' \subset E_1'$, наделенное нормой $\| \|_1$. Тогда $(E_0' \| \|_1)' = E_1$ (в установленной между E_0' и E_1 двойственности).*

Доказательство. По теореме Макки [5, с. 668] сопряженное к пространству $(E_0' \| \|_1)$ совпадает с E_1. Шар $B_1(E_1) = K$ компактен, а следовательно, замкнут в топологии $\sigma(E_1, E_0')$. Согласно данным работы [6, §3, замечание 3.2] отсюда следует, что нормы $\| x \|_1$ и $\sup\{f(x) : \| f \|_1 \leqslant 1, f \in E_0'\}$ на E_1 совпадают. Лемма доказана.

Лемма 3. (Амир, Линденштраус). *Пусть α_0 — первое порядковое число мощности* $\mathrm{dens}_0\, E_0$ *и* $\{x_\alpha : \omega \leqslant \alpha < \alpha_0\}$ — *всюду плотное в E_0 подмножество пространства E_1 (без ограничения общности можно считать $\| x_\omega \|_1 = \| x_\omega \|_0 = 1$). Тогда можно выбрать систему линейных подпространств x_α, F_α из E_0 и E_0' соответственно,* $\omega \leqslant \alpha < \alpha_0$, *такую что для всякого α:* 1) $d_0(S_0(x_\alpha), F_\alpha^{\perp}) = 1$, $d_1(S_1(F_\alpha), X_\alpha^{\perp}) = 1$; 2) $x_\alpha \in X_{\alpha+1}$, $X_\beta \subset X_\alpha$ *при* $\beta < \alpha$, $\dim X_{\alpha+1}/[x_\alpha]_0 = \infty$; 3) $\mathrm{dens}_0\, x_\alpha \leqslant \bar{\bar{\alpha}}$, $\mathrm{dens}_1 F_\alpha \leqslant \bar{\bar{\alpha}}$; 4) $[x_\alpha : \omega \leqslant \alpha < \alpha_0]_0 = E_0$.

Доказательство. Построение подпространств x_α, F_α будем производить индуктивно. За x_ω можно взять $[x_\omega]_0$, а за F_ω — линейную оболочку функционала $f_\omega \in E_0'$, для которого $\| f_\omega \|_0 = \| f_\omega \|_1 = f_\omega(x_\omega)$. Справедливость свойства 1 для x_ω, F_ω вытекает из леммы 1, остальных — очевидна.

Пусть для $\beta < \alpha$ подпространства x_β, F_β построены. Если α — предельное порядковое число, то положим $x_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} x_\beta$, $F_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} F_\beta$. Справедливость свойств 1 — 3 для x_α, F_α вытекает из определения.

Пусть теперь α — не предельное порядковое число. Обозначим через $(\tilde{x}_\alpha^n)_{n=1}^{\infty}$ набор элементов из E_1 таких, что $\dim([x_{\alpha-1}, (\tilde{x}_\alpha^n)_{n=1}^{\infty}]_0/[x_{\alpha-1}]_0) = \infty$. Такой набор существует, поскольку $\mathrm{dens}_0 \times X_{\alpha-1} < \bar{\bar{\alpha}}_0$ и E_1 всюду плотное подмножество E_0. Положим $x_\alpha^1 = [x_{\alpha-1}, x_{\alpha-1}, (\tilde{x}_\alpha^n)_{n=1}^{\infty}]_0$. Очевидно, $\mathrm{dens}_0\, x_\alpha^1 \leqslant \bar{\bar{\alpha}}$. Выберем на сфере $S_0(x_\alpha^1)$ всюду плотное подмножество $(y_\beta^1)_{\beta<\alpha}$ и обозначим через g_β^1 функционалы, для которых $\| g_\beta^1 \|_0 = g_\beta^1(y_\beta^1)$. Положим $F_\alpha^1 = [F_{\alpha-1}$ $(g_\beta^1)_{\beta<\alpha}]_0$. Очевидно, $\mathrm{dens}_1 F_\alpha^1 \leqslant \bar{\bar{\alpha}}$.

Если для n подпространства x_α^n, F_α^n построены, выберем на $S_1(F_\alpha^n)$ всюду плотное подмножество $(h_\beta^n)_{\beta<\alpha}$ и элементы $z_\beta^n \in E_1$, для которых $h_\beta^n(z_\beta^n) = \| z_\beta^n \|_1$ (они существуют, поскольку согласно лемме 2 $(E_0' \| \ \|_1)' = E_1)$. Положим $x_\alpha^{n+1} = [x_\alpha^n, (z_\beta^n)_{\beta<\alpha}]$. Выберем на x_α^{n+1} всюду плотное подмножество $(y_\beta^{n+1})_{\beta<\alpha}$ и функционалы g_β^{n+1}, для которых $g_\beta^{n+1}(y_\beta^{n+1}) = \| g_\beta^{n+1} \|$. Положим $F_\alpha^{n+1} = [F_\alpha^n, (g_\beta^{n+1})_{\beta<\alpha}]$ и x_α, $F_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_\alpha^n, \bigcup_{n=1}^{\infty} F_\alpha^n$. Справедливость для X_α, F_α условия 1 следует из определения и леммы 1; условий 2 и 3 — из построения. Наше построение закончится при $\alpha = \alpha_0$, условие 4 при этом будет следовать из условия 2. Лемма доказана.

Замечание 1. Из условия 1 следует $[X_\alpha]_0 \cap F_\alpha^\perp = 0$,

$$([X_\alpha]_0 \cap E_1) \cap (F_\alpha^\perp \cap E_1) = 0 \text{ и } d_1(S_1(F_\alpha),$$

$[X_\alpha^\perp]_1) = 1$. Обозначим через $\overline{E}_0'$ замыкание подпространства $E_0' \subset E_1'$ по норме пространства E_1'; по лемме 2 $(\overline{E}_0')' = E_1$. Положим $M^\top = \{x \in E_1 : x(M) \equiv 0\}$ для $M \subset E_1'$; тогда $[F_\alpha]_1^\top + [X_\alpha^\perp]_1^\top = E_1$ [см., напр., 7, теорему 4.8]. Поскольку $[F_\alpha]_1^\top = F_\alpha^\top = F_\alpha^\perp \cap E_1$ и $[X_\alpha^\perp]_1^\top = (X_\alpha^\perp)^\top = (X_\alpha^\perp)^\perp \cap E_1 = [X_\alpha]_0 \cap E_1$, то $([X_\alpha]_0 \cap E_1) + (F_\alpha^\perp \cap E_1) = E_1$ и $[X_\alpha]_0 + F_\alpha^\perp = E_0$. Чтобы получить переформулировку леммы 3 в терминах статьи [1], достаточно в качестве P_α взять проекторы с ядрами $F_\alpha^\perp$ и образами $[X_\alpha]_0$.

Следствие 1. *Существует система подпространств* $\{\tilde{X}_\alpha, \tilde{F}_\alpha : \omega \leqslant \alpha < \alpha_0$, α — *не предельное*$\}$ *из* E_0 *и* E_0' *соответственно, такая что*: 1) $d_0(S_0(\tilde{X}_\alpha), \tilde{F}_\alpha^\perp) \geqslant 1/2$, $\tilde{X}_\alpha + \tilde{F}_\alpha = E_0$, $\tilde{X}_\beta \subset \tilde{F}_\alpha^\perp$ *при* $\beta \neq \alpha$; 2) $\tilde{X}_\alpha$ *бесконечномерно при* $\alpha > \omega$; 3) $\operatorname{dens}_0 \tilde{X}_\alpha \leqslant \overline{\overline{\alpha}}$; 4) $[\tilde{X}_\alpha : \omega \leqslant \alpha < \alpha_0$, α — *не предельное*$]_0 = E_0$; 5) $\tilde{F}_\alpha$ *изоморфно* $\tilde{X}_\alpha'$, *причем* $\sup\{f(x) : x \in S_0(\tilde{X}_\alpha)\} \leqslant \|f\|_0 \leqslant 2\sup\{f(x) : x \in S_0(\tilde{X}_\alpha)\}$.

Действительно, положим $\tilde{X}_\omega = X_\omega$, $\tilde{F}_\omega = F_\omega$, $\tilde{X}_\alpha = [X_\alpha]_0 \cap F_{\alpha-1}^\perp$, $\tilde{F}_\alpha = (X_{\alpha-1}, F_\alpha^\perp)^\perp$ при α не предельном порядковом числе. Тогда свойства 1—4 будут вытекать из свойств 1—4 леммы 3 и замечания 1, а свойство 5 — из свойства 1.

Лемма 4. *Пусть* $\tilde{X}_\alpha$, $\tilde{F}_\alpha$ — *система подпространств из следствия 1 и* $0 < \varepsilon < 1$. *Тогда можно выбрать биортогональную систему* $\{x_{\alpha n}^i, f_{\alpha n}^i\} = \{x_{\alpha n}^i, f_{\alpha n}^i : \omega \leqslant \alpha < \alpha_0$, α — *предельное*, $n = \overrightarrow{1,\infty}$, $i = \overrightarrow{1,n}$, *такую что для всяких* α *и* n: 1) $x_{\alpha n}^i \in \tilde{X}_{\alpha+n}$, $f_{\alpha n}^i \in \tilde{F}_{\alpha+n}$; 2) $d_0(x, \tilde{F}_{\alpha+n}^\perp) \geqslant 1/2$ *для* $x \in S_0((x_{\alpha n}^i)_{i=1}^n)$; 3) $\| x_{\alpha n}^i \|_0 = 1$, $\| f_{\alpha n}^i \|_0 \leqslant 2(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)$; 4) $(1-\varepsilon)(\sum_1^n a_i^2)^{1/2} \leqslant \| \sum_{i=1}^n a_i x_{\alpha n}^i \|_0 \leqslant (1+\varepsilon)(\sum_1^n a_i^2)^{1/2}$ *для любых скаляров* a_i; 5) $[x_{\alpha n}^i]_{i=1}^n \oplus c_\alpha^n = \tilde{X}_{\alpha+n}$, *где* $c_\alpha^n = \tilde{X}_{\alpha+n} \cap ((f_{\alpha n}^i)_{i=1}^n)^\perp$.

Доказательство. Мы проведем рассуждения, близкие к доказательству леммы 2 работы [8]. На основании теоремы Дворецкого [9] выберем в $\tilde{X}_{\alpha+n}$ подпространство M_α^n и линейный оператор $Q: l_2^n \to M_\alpha^n$ такие, что $\sqrt{1-\varepsilon}\,\| x \|_{l_2^n} \leqslant \| Qx \|_0 \leqslant \sqrt{1+\varepsilon}\,\| x \|_{l_2^n}$. Положим $x_{\alpha n}^i = Qe_i / \| Qe_i \|_0$, где $(e_i)_1^n$ — естественный базис пространства l_2^n.

Поскольку $d_0(x_{\alpha n}^i, \quad [(x_{\alpha n}^j)_{j=1}^n \setminus x_{\alpha n}^i]_0) \geqslant \sqrt{(1-\varepsilon)} / \| Qe_i \|_0 \geqslant \geqslant \sqrt{(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)} \geqslant (1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)$, выберем в $\tilde{X}'_{\alpha+n}$ функционалы $f_{\alpha n}^i$, биортогональные к $x_{\alpha n}^i$, с нормой, не превосходящей $(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)$. Согласно свойству 5 следствия 1 можно считать $f_{\alpha n}^i \in \tilde{F}_\alpha$, $\| f_{\alpha n}^i \|_0 \leqslant 2(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)$. Свойство 2 следует из свойства 1 следствия 1. Остальные условия леммы вытекают из построения. Лемма доказана.

Лемма 5. *Биортогональную систему $\{x_{\alpha n}^i, f_{\alpha n}^i\}$ из леммы 4 можно расширить до М-базиса $\{x_{\alpha n}^i, f_{\alpha n}^i\} \cup \{y_\alpha, g_\alpha : \omega \leqslant \alpha < \alpha_0$, α — предельное$\}$, т. е. так, что:* 1) $\| y_\alpha \| = 1$, $g_\alpha(y_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ *для всяких* α и β; 2) $f_{\alpha n}^i(y_\beta) = g_\beta(x_{\alpha n}^i) = 0$ *при любых* α, n, i, β; 3) $\{x_{\alpha n}^i\} \cup \{y_\alpha\}$ *тотально на* E_0' *и* $\{f_{\alpha n}^i\} \cup \{g_\alpha\}$ *тотально на* E_0.

Доказательство. Для всякого $\alpha+n$ подпространство C_α^n дополнительно в E_0 (см. свойство 1 следствия 1 и свойство 5 леммы 4), поэтому является **WCG** — пространством [10, следствие 1 к предложению 2.1]. Следовательно, оно имеет M-базис $\{y_{\alpha n}^\beta, \tilde{g}_{\alpha n}^\beta\}_{\beta \in I_{\alpha n}}$, $\| y_{\alpha n}^\beta \|_0 = 1$, $y_{\alpha n}^\beta \in C_\alpha^n$, $\tilde{g}_{\alpha n}^\beta \in (C_\alpha^n)'$ [см. 11]. Функционалы $\tilde{g}_{\alpha n}^\beta$ можно расширить до непрерывных на всем пространстве E_0 функционалов $g_{\alpha n}^\beta$, положив $g_{\alpha n}^\beta(\tilde{F}_{\alpha+n}^\perp + (x_{\alpha n}^i)_{i=1}^n) \equiv 0$ и дальше по аддитивности. Так как $\operatorname{card} I_{\alpha n} = \operatorname{dens} \tilde{X}_{\alpha+n}$, то элементы $y_{\alpha n}^\beta$, $g_{\alpha n}^\beta$ можно занумеровать предельными порядковыми числами, которые меньше α_0: $(y_{\alpha n}^\beta, g_{\alpha n}^\beta : \beta \in I_{\alpha n}$, $\omega \leqslant \alpha < \alpha_0$, α — предельное $n = \overrightarrow{1, \infty}) = \{y_\alpha$, g_α: $\omega \leqslant \alpha < \alpha_0$, α — предельное$\}$. Проверка выполнения условий 1—3 не представляет труда. Лемма доказана.

Существование ограниченного M-базиса

Теорема. *В любом* **WCG**-*пространстве существует ограниченный М-базис.*

Доказательство. Пусть $\{x_{\alpha n}^i, f_{\alpha n}^i\} \cup \{y_\alpha, g_\alpha\}$ — M-базис, построенный в лемме 5, $0 < \varepsilon < 1/2$ и $a_\alpha = d_0(y_\alpha, g_\alpha^\perp)$.

Построение. Выберем для каждого $\omega \leqslant \alpha < \alpha_0$ последовательность натуральных чисел $\{n(\alpha, k)\}_{k=1}^\infty$ так, чтобы для всякого k, $1/\sqrt{n(\alpha, k)} < \varepsilon/6$,

$$\frac{(n(\alpha, k) - 1)\varepsilon}{8} - \frac{(2(1-\varepsilon) - \varepsilon(1+\varepsilon))^2}{2\varepsilon(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)^2} > \begin{cases} n(\alpha, k-1) & \text{при } k \neq 1 \\ \sqrt{n(\alpha, k)}/a_\alpha & \text{при } k = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Элементы $x^i_{\alpha n(\alpha,k)}$, $f^i_{\alpha n(\alpha,k)}$ будем обозначать через $x^i_{\alpha nk}$, $f^i_{\alpha nk}$. Для всякого α положим

$$e_{\alpha n}^{\ i} = \begin{cases} x^i_{\alpha n} \text{ при } n \notin \{n(\alpha,\ k)\}_{k=1}^{\infty},\ i = \overrightarrow{1, n}; \\ x^i_{\alpha n1} + \dfrac{\tilde{y}_\alpha}{\sqrt{n(\alpha,1)}} \text{ при } n = n(\alpha,\ 1),\ i = \overrightarrow{1,\ n(\alpha,\ 1)}; \\ x^i_{\alpha nk} + \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n(\alpha,k-1)} x^i_{\alpha nk-1}}{n(\alpha,k-1)} \text{ при } \begin{cases} n = n(\alpha,\ k); \\ k \neq 1; \\ i = 1,\ n(\alpha,\ k). \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

Положим также $D^j_{\beta m} = [\{\bigcup\limits_{i\alpha n} e^i_{\alpha n}\} / e^j_{\beta m}]_0$. Выберем $\tilde{f}^j_{\beta m}$ так, чтобы $f^j_{\beta m}(D^j_{\beta m}) \equiv 0$, $\tilde{f}^j_{\beta m}(e^j_{\beta m}) = 1$. (Далее будет показано, что $e^j_{\beta m}$, $\notin D^j_{\beta m}$, поэтому такой выбор возможен).

Тотальность $\{e^i_{\alpha n}\}$. Применяя последовательно выражение (2), условие 4 из леммы 4 и формулу (1), получаем

$$\left\| \sum_{k=1}^{t} (-1)^k \left(\sum_{i=1}^{n(\alpha,k)} e^i_{\alpha nk} \right) \Big/ n(\alpha,\ k) + \frac{1}{\sqrt{n(\alpha,1)}} y_\alpha \right\|_0 =$$

$$= \left\| \frac{1}{n(\alpha,t)} \left(\sum_{i=1}^{n(\alpha,t)} x^i_{\alpha nt} \right) \right\|_0 \leqslant \frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)\sqrt{n(\alpha t)}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Таким образом, $y_\alpha \in [\{e^i_{\alpha n}\}]_0$; согласно выражению (2) и пункту 3 леммы 5 $\{x_*{}^i_{\alpha n}\} \subset [\{e^i_{\alpha n}\}]_0$ и $[\{e^i_{\alpha n}\}]_0 = E_0$.

Тотальность $\{f^i_{\alpha n}\}$. Согласно формуле (2) для всяких α и m $(\tilde{f}^i_{\alpha nk} : k = \overrightarrow{1,\ m},\ i = \overrightarrow{1, n(\alpha,\ k)})^{\perp} = \bigcap\ (D^i_{\alpha nk} : k = \overrightarrow{1, m},\ \ i = \overrightarrow{1, n(\alpha, k)}) \subset (g_\alpha,\ f^i_{\alpha nk} : k = \overrightarrow{1, m-1},\ i = \overrightarrow{1, n(\alpha, k)})^{\perp}$.

Поскольку множество функционалов $\{f^i_{\alpha n}\} \cup \{g_\alpha : \omega \leqslant \alpha < \alpha_0,$ α — предельное$\}$ тотально на E_0, то и $\{\tilde{f}^i_{\alpha n}\}$ также будет тотально на E_0.

Ограниченность. Покажем сначала, что

$$d_0(e^i_{\alpha n},\ D^i_{\alpha n}) > \frac{1-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} - \varepsilon. \tag{3}$$

Если $n \notin \{n(\alpha, k)\}_{k=1}^{\infty}$, то $e^i_{\alpha n}$ совпадает с $x^i_{\alpha n}$ и, согласно выражению (2), $D^i_{\alpha n} \subset (f^i_{\alpha n})^{\perp}$. Пользуясь свойством 3 леммы 4 получаем $d_0(e^i_{\alpha n},\ \ D^i_{\alpha n}) \geqslant d_0(e^i_{\alpha n},\ \ (f^i_{\alpha n})^{\perp}) = d_0(x^i_{\alpha n},\ \ (f^i_{\alpha n})^{\perp}) = 1/\| f^i_{\alpha n} \|_0 \geqslant$ $\geqslant (1-\varepsilon)/2(1+\varepsilon)$, т. е. неравенство (3) справедливо.

Пусть теперь $n = n(\alpha, k)$. Выберем любой элемент z из линейной оболочки множества $(\bigcup_{j\beta m} e^j_{\beta m}) \setminus e^i_{\alpha n}$:

$$z = \sum_{\beta mk \in j} z_{\beta mk} + \bar{z}, \tag{4}$$

где j — некоторое конечное число индексов, $z_{\beta mk} \in \operatorname{lin}(e^j_{\beta mk} : j = 1, m(\beta, k))$, $\bar{z} \in \operatorname{lin}(\bigcup_{\alpha i} (e^i_{\alpha n} : n \notin \{n(\alpha, k)\}_{k=1}^{\infty})$.

Покажем, что $\| e^i_{\alpha n} - x^i_{\alpha n} \|_0 < \varepsilon/4$. Для этого рассмотрим определение (2). В первом случае $\| e^i_{\alpha n} - x^i_{\alpha n} \|_0 = 0 < \varepsilon/4$. Во втором случае $\| e^i_{\alpha n} - x^i_{\alpha n} \|_0 = \| y_\alpha \|_0 / \sqrt{n(\alpha, 1)}$. По построению $\| y_\alpha \|_0 = 1$ и, согласно формуле (1), $1/\sqrt{n(\alpha, 1)} < \varepsilon/6 < \varepsilon/4$. В третьем случае, пользуясь пунктом 4 леммы 4, получаем

$$\| e^i_{\alpha n} - x^i_{\alpha n} \|_0 = \| (\sum_{i=1}^{n(\alpha, k-1)} x^i_{\alpha nk-1}) / n(\alpha, k-1) \|_0 < (1+\varepsilon)/\sqrt{n(\alpha, k-1)} < (1+\varepsilon)\,\varepsilon/6 < \varepsilon/4.$$

Напомним: $\varepsilon < 1/2$! Поэтому $\| e^i_{\alpha n} - z \|_0 \geqslant \| x^i_{\alpha n} - z \|_0 - \| e^i_{\alpha n} - x^i_{\alpha n} \|_0 \geqslant \| x^i_{\alpha n} - z \|_0 - \varepsilon/4$. Предположим, что

$$\| x^i_{\alpha n} - z \|_0 < \frac{1-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5}$$

Тогда вследствие выражения (2) в сумме (4) найдется слагаемое

$$z_{\alpha nk} = \sum_{j=1}^{n(\alpha, k+1)} A^j_{\alpha nk} e^j_{\alpha nk},$$

для которого

$$b_{\alpha nk} = (\sum_{j=1}^{n(\alpha, k+1)} A^j_{\alpha nk+1}) / n(\alpha, k) > \frac{\varepsilon}{4}. \tag{6}$$

Покажем, что в сумме (4) существует слагаемое

$$z_{\alpha nk} = \sum_{j=1}^{n(\alpha, k)} A^j_{\alpha nk} e^j_{\alpha nk}, \text{ для которого}$$

$$\left| \sum_{j=1}^{n(\alpha,k)} A^j_{\alpha nk} \right| > \begin{cases} n(\alpha, k-1) & \text{при } k \neq 1; \\ \dfrac{\sqrt{n(\alpha, 1)}}{a_\alpha} & \text{при } k = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Действительно, применив последовательно выражение (5), тот факт, что $x^i_{\alpha n} \in \{x^j_{\alpha nk}\}_{j=1}^{n(\alpha,k)}$, и свойства 2 и 4 леммы 4, получим

$$\frac{1-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{4} > \| x^i_{\alpha n} - z \|_0 = \| x^i_{\alpha n} - \sum_{j=1}^{n(\alpha,k)} (b_{\alpha nk} + A^j_{\alpha nk}) \times$$

$$\times x^j_{\alpha nk} - (z - b_{\alpha nk} \sum_{j=1}^{n(\alpha,k)} x^j_{\alpha nk} - \sum_{j=1}^{n(\alpha,k)} A^j_{\alpha nk} x^j_{\alpha nk} \|_0 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \| x^i_{\alpha n} - \sum_{j=1}^{n(\alpha,k)} (b_{\alpha nk} + A^j_{\alpha nk}) x^j_{\alpha nk} \|_0 \geqslant \frac{1-\varepsilon}{2} \Big(\sum_{j=1,\ j \neq i}^{n(\alpha,k)} (b_{\alpha nk} + A^j_{\alpha nk})^2 \Big)^{1/2}.$$

Отсюда $\left(\frac{1-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{4}\right)^2 \geqslant \frac{(1-\varepsilon)^2}{2} \sum_{j=1, j\neq i}^{n(\alpha,k)} (b_{\alpha nk} + A^j_{\alpha nk})^2.$

Выполнив алгебраические преобразования, имеем

$$-2b_{\alpha nk} \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n(\alpha,k)} A^j_{\alpha nk} \geqslant (n(\alpha,\ k) - 1)(b_{\alpha nk})^2 - \\ - 4\left(\frac{1-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{4}\right)^2 \Big/ (1-\varepsilon)^2.$$

Разделив последнее неравенство на $2\,|\,b_{\alpha nk}\,|$ и воспользовавшись формулой (6), получаем

$$\Big| \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n(\alpha,k)} A^j_{\alpha nk} \Big| \geqslant \frac{(n(\alpha,\ k) - 1)\varepsilon}{8} - 16 \left(\frac{1-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{4}\right)^2 \Big/ 2\varepsilon(1-\varepsilon)^2 = \\ = \frac{(n(\alpha,\ k)-1)\varepsilon}{8} - \frac{(2(1-\varepsilon) - \varepsilon(1+\varepsilon))^2}{2\varepsilon(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)^2}.$$

Используя выражение (1), имеем

$$\Big| \sum_{j=1, j\neq i}^{n(\alpha,k)} A^j_{\alpha nk} \Big| \geqslant \begin{cases} n(\alpha,\ k-1) \text{ при } k \neq 1; \\ \dfrac{\sqrt{n(\alpha,\ 1)}}{a_\alpha} \text{ при } k = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Из выбора элемента z следует $A^i_{\alpha nk} = 0$, поэтому выражение (7) доказано. При $k \neq 1$ мы переходим ко второму пункту, при $k = 1$ — к третьему.

2. Таким образом,

$$|\,b_{\alpha nk}\,| \geqslant 1, \tag{9}$$

где $b_{\alpha nk} = (\sum_{j=1}^{n(\alpha,k-1)} A^j_{\alpha nk}) / n(\alpha,\ k-1)$; положим

$$u_{\alpha nk-1} = b_{\alpha nk} \sum_{j=1}^{n(\alpha,k-1)} x^j_{\alpha nk-1}.$$

Проведем еще раз рассуждения, подобные пункту 1. Покажем, что в сумме (4) существует слагаемое $z_{\alpha nk-1} = \sum_{j=1}^{n(\alpha,k-1)} A^j_{\alpha nk-1} \times \times e^j_{\alpha nk-1}$, для которого

$$\Big| \sum_{j=1}^{n(\alpha,k-1)} A^j_{\alpha nk-1} \Big| > \begin{cases} n(\alpha,\ k-1) \text{ при } k \neq 2; \\ \sqrt{n(\alpha,\ 1)/a_\alpha} \text{ при } k = 2. \end{cases} \tag{10}$$

Действительно, применив последовательно формулу (5) и свойства 2 и 4 леммы 4, получим

$$\frac{1-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}-\frac{\varepsilon}{4}>\|x^i_{\alpha n}-z\|_0=\|x^i_{\alpha n}-u_{\alpha nk-1}-$$

$$-\sum_{j=1}^{n(\alpha,k-1)}A^j_{\alpha nk-1}x^j_{\alpha nk-1}-(z-u_{\alpha nk-1}-\sum_{j=1}^{n(\alpha,k-1)}A^j_{\alpha nk-1}\times$$

$$\times x^j_{\alpha nk-1})\|_0\geqslant\frac{1}{2}\left\|u_{\alpha nk-1}+\sum_{j=1}^{n(\alpha,k-1)}A^j_{\alpha nk-1}x^j_{\alpha nk-1}\right\|_0\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1-\varepsilon}{2}\left(\sum_{j=1}^{n(\alpha,k-1)}(b_{\alpha nk-1}+A^j_{\alpha nk-1})^2\right)^{1/2}.$$

Отсюда $\left(\frac{1-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}-\frac{\varepsilon}{4}\right)^2\geqslant\frac{(1-\varepsilon)^2}{4}\sum\limits_{j=1}^{n(\alpha,k-1)}(b_{\alpha nk-1}+A^j_{\alpha nk-1})^2.$

Выполнив алгебраические преобразования, получим

$$-2b_{\alpha nk-1}\sum_{j=1}^{n(\alpha,k-1)}A^j_{\alpha nk-1}\geqslant n(\alpha,\ k-1)(b_{\alpha nk-1})^2-$$

$$-4\left(\frac{1-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}-\frac{\varepsilon}{4}\right)^2\Big/(1-\varepsilon)^2.$$

Разделив на $2|b_{\alpha nk}|$ и учитывая формулы (9) и (1), получаем выражение (10). При $k\neq 2$ мы переходим ко второму пункту, заменив k на $k-1$, при $k=2$,— к третьему.

3. Через конечное число шагов мы придем к тому, что сумма (4) содержит слагаемое $z_{\alpha n1}=\sum\limits_{j=1}^{n(\alpha,1)}A^j_{\alpha n1}x^j_{\alpha n1}+y,\quad y=(\sum\limits_{j=1}^{n(\alpha,1)}\times A^j_{\alpha n1})\,y_\alpha/\sqrt{n(\alpha,1)}$ и $|\sum\limits_{j=1}^{n(\alpha,1)}A^j_{\alpha n1}|>\sqrt{n(\alpha,1)}/a_\alpha$. Поскольку $x^i_{\alpha n}-(z-y)\in g^\perp_\alpha$, то $\|x^i_{\alpha n}-(z-y)-y\|_0\geqslant a_\alpha\|y\|_0\geqslant 1$, что противоречит выражению (8), и, следовательно, (3) выполняется. Как нетрудно проверить, $\|\tilde f^i_{\alpha n}\|_0\leqslant 1/d_0(e^i_{\alpha n},D^i_{\alpha n})$, поэтому $\|\tilde f^i_{\alpha n}\|_0\times\|e^i_{\alpha n}\|_0\leqslant(1+\varepsilon/4)/d_0(e^i_{\alpha n},\ D^i_{\alpha n})\leqslant(1+\varepsilon/4)\left(\frac{1-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}-\varepsilon\right)$. Теорема доказана.

Замечание 2. Из доказательства теоремы непосредственно следует, что во всяком **WCG**-пространстве для любого $\delta>0$ существует M-базис $\{e_\alpha,\ f_\alpha\}$, для которого $\sup\limits_\alpha\|e_\alpha\|\,\|f_\alpha\|<2+\delta$.

В заключение автор выражает благодарность М. И. Кадецу за ценные замечания.

Список литературы: 1. *Amir D., Lindenstrauss J.* The structure of weakly compact sets in Banach spaces.— Ann. of Math., 1968, v. 88, № 1, p. 35-56. 2. *Пличко А. Н.* M-базисы в сепарабельных и рефлексивных банаховых пространствах.— Укр. мат. журн., 1977, т. 29, № 5, с. 681—685. **3.** *Ovsepian R. I., Pelczyński A.* On the existense of a fundamental total and bounded biorthogonal sequence in every separable Banach space, and related constructions of uniformly bounded orthonormal system in L^2.— Studia Math., 1975, v. 54, № 2, p. 149—159. **4.** Функциональный анализ /Под ред. С. Г. Крейна. М. Наука, 1972. 544 с. **5.** *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М., Мир, 1969. 1071 с. **6.** *Крейн С. Г., Петунин Ю. И.* Шкалы банаховых пространств.— УМН, 1966, т. 21. вып. 2, с. 89—168. **7.** *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., Мир, 1972. 740 с. **8.** *Davis* W., *Johnson* W. B. On the existence of fundamentals and total bounded biorthogonal systems in Banach spaces.— Studia Math., 1973, v. 45, № 2, p. 173-179. **9.** *Дворецкий А.* Некоторые результаты о выпуклых телах в банаховых пространствах.— Сб. переводов «Математика», 1964, т. 8, № 1, с. 70—102. **10.** *Lindenstrauss J.* Weakly compact sets — their topological properties and the Banach spaces they generate.— Ann. Math. Studies, 1972, № 69, p. 235—273. **11.** *Reif J.* A note of Markusevic bases in weakly compactly generated Banach spaces.— Comment. Math. Univ. Carol. 1974, v. 15, № 2, p. 335—340.

Поступила 1 октября 1975 г.