УДК 517. 949. 2

И. И. МАРМЕРШТЕЙН

О НЕКОТОРОМ СВОЙСТВЕ СПЕКТРА ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ И О ЕГО ПРИМЕНЕНИЯХ К ИССЛЕДОВАНИЮ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ И ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе [1] была установлена одна лемма относительно спектра разностного оператора, которая использовалась при исследовании устойчивости решений линейных уравнений в частных разностях.

В настоящей работе приводится существенное обобщение указанной леммы. Это позволило получить новые результаты по устойчивости разностных уравнений, а также рассмотреть другие приложения.

Пусть L — комплексное банахово пространство; $T_1, T_2, \ldots, T_n$ — ограниченные, попарно перестановочные операторы, действующие в L. Рассмотрим оператор-функцию $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, значения которой — ограниченные операторы, перестановочные с $T_1, T_2, \ldots \ldots, T_n$. Пусть $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ определена в окрестности множества $\sigma(T_1) \times \sigma(T_2) \times \cdots \times \sigma(T_n)$ ($\sigma(T_j)$ — спектр T_j) и аналитична по каждой из переменных при фиксированных остальных. Множество таких оператор-функций будем обозначать $\{\Phi\}$.

Рассмотрим пример, который будет существенно использован и который показывает, что введенный класс оператор-функций достаточно широк.

Пусть $L^n_{[0,\infty)}$ — пространство функций $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ со значениями из комплексного банахова пространства E, заданных в области $0 \leqslant t_1, t_2, \ldots, t_n < \infty$ и ограниченных в этой области. Вводим норму в $L^n_{[0,\infty)}$: $|||f||| = \sup\limits_{0 \leqslant t_1, t_2, \ldots, t_n < \infty} \| f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \|$.

Очевидно, $L^n_{[0,\infty)}$ — банахово пространство. Пусть $K_1, \ldots, K_n$ — операторы сдвига, действующие в $L^n_{[0,\infty)}$:

$$K_j f(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_j + 1, \ldots, t_n). \tag{1}$$

Легко показать, что $\sigma(K_j) = \{\mu : |\mu| \leqslant 1\}$. В качестве $\Phi(\lambda_1, \ldots \ldots, \lambda_n)$ можно, например, рассмотреть любой полином с коэффициентами из кольца $\underset{K_1, \ldots, K_n}{R}$ ограниченных операторов, действующих в E. ($\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum\limits_{i_1, \ldots, i_n} A_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}$. Операторы $A_{i_1, \ldots, i_n}$ можно рассматривать в функциональном пространстве $L^n_{[0,\infty)}$ (применить оператор $A_{i_1, \ldots, i_n}$ к функции означает применить его к каждому значению этой функции). Перестановочность $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ с каждым из операторов сдвига очевидна. (Заметим, что операторы $A_{i_1, \ldots, i_n}$ между собой, вообще говоря, неперестановочны).

Вернемся к общей постановке. Каждой оператор-функции $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ из $\{\Phi\}$ поставим в соответствие оператор

$$\Phi(T_1, \ldots, T_n) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \oint_{\gamma_1} \cdots \oint_{\gamma_n} \Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)(T_1 - \lambda_1 I)^{-1} \ldots \\ \cdots (T_n - \lambda_n I)^{-1} d\lambda_1 \ldots d\lambda_n. \tag{2}$$

Здесь $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — контуры (любые), окружающие соответственно спектры операторов $T_1, \ldots, T_n$.

Соответствие, заданное формулой (2), обладает следующими свойствами:

1. Если $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = A$, то $\Phi(T_1, \ldots, T_n) = A$ (A — ограниченный оператор, перестановочный с $T_1, \ldots, T_n$).

2. Если $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \Phi_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + \Phi_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то $\Phi(T_1, \ldots, T_n) = \Phi_1(T_1, \ldots, T_n) + \Phi_2(T_1, \ldots, T_n)$.

3. Если $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \Phi_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot \Phi_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то $\Phi(T_1, \ldots, T_n) = \Phi_1(T_1, \ldots, T_n) \cdot \Phi_2(T_1, \ldots, T_n)$, причем в обоих равенствах порядок сомножителей важен. Заметим, что из указанных свойств следует: если $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = A\Phi_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + B\Phi_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где A и B — ограниченные операторы, перестановочные с $T_1, \ldots, T_n$, то $\Phi(T_1, \ldots, T_n) = A\Phi_1(T_1, \ldots, T_n) + B\Phi_2(T_1, \ldots, T_n)$.

4. Если $\lim\limits_{m\to\infty} \Phi_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ равномерно в некоторой окрестности $\sigma(T_1) \times \sigma(T_2) \times \cdots \times \sigma(T_n)$ то $\lim\limits_{m\to\infty} \Phi_m(T_1, \ldots, T_n) = \Phi(T_1, \ldots, T_n)$.

Свойства 1, 2, 4 — тривиальны. Доказательство свойства 3 по сути не отличается от доказательства соответствующего свойства для случая, когда $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — скалярная функция [см. 2]. Справедлива

Теорема 1. *Каждая точка спектра оператора* $\Phi(T_1, \ldots, T_n)$ *принадлежит спектру оператора* $\Phi(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ *при некотором фиксированном наборе* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ $(\mu_j \in \sigma(T_j))$.

Доказательство. Пусть ζ — точка спектра оператора $\Phi(T_1, \ldots, T_n)$. Допустим, что ζ — регулярная точка оператора $\Phi(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ при всяких $\lambda_j \in \sigma(T_j)$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим оператор-функцию $[\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - \zeta I]^{-1} = \psi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Она принадлежит классу $\{\Phi\}$ и, следовательно, ей соответствует некоторый оператор $\psi(T_1, \ldots, T_n)$. Далее, $[\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - \zeta I][\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - \zeta I]^{-1} = [\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - \zeta I]^{-1}[\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - \zeta I] = I$. Используя свойства 1, 3, получаем $[\Phi(T_1, \ldots, T_n) - \zeta I]\,\psi(T_1, \ldots, T_n) = \psi(T_1, \ldots, T_n) \cdot [\Phi(T_1, \ldots, T_n) - \zeta I] = I$. Отсюда вытекает, что существует ограниченный оператор $[\Phi(T_1, \ldots, T_n) - \zeta I]^{-1}$, что противоречит условию теоремы.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: спектр оператора $\Phi(T_1, \ldots, T_n)$ есть правильная часть множества всех спектров семейства операторов $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_j \in \sigma(T_j)$ (если, например, L конечномерно). Поэтому представляют интерес случаи, когда указанные спектры совпадают. Мы покажем, что такая ситуация имеет место в рассмотренном выше примере ($T_j = K_j$ — операторы сдвига в функциональном пространстве $L^n_{[0,\infty)}$).

Теорема 2. *Спектр оператора* $\Phi(K_1, \ldots, K_n)$ *совпадает с множеством точек спектра семейства операторов* $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, *где* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *пробегают единичные круги* $|\lambda_j| \leqslant 1$ $(j = 1, 2, n)$.

Доказательство. Принимая во внимание теорему 1, остается доказать, что при любом наборе $|\lambda_j| \leqslant 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ любая точка спектра оператора $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ принадлежит спектру оператора $\Phi(K_1, \ldots, K_n)$. Пусть ζ — точка спектра оператора $\Phi(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ при некоторых фиксированных $|\mu_j| \leqslant 1$; $\mu_j \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Рассмотрим произвольный вектор $g \in E$ и функцию $f(t_1, \ldots$

$\ldots, t_n) = \mu_1^{t_1} \ldots \mu_n^{t_n} g$. Очевидно, $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in L^n_{[0, \infty)}$. Из формулы (2) следует

$$\Phi(K_1, \ldots, K_n) \mu_1^{t_1} \cdot \mu_2^{t_2} \ldots \mu_n^{t_n} g = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \oint_{\gamma_1} \cdots \oint_{\gamma_n} \Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \times$$

$$\times (K_1 - \lambda_1 I)^{-1} \ldots (K_n - \lambda_n I)^{-1} g d\lambda_1 \ldots d\lambda_n =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \oint_{\gamma_1} \cdots \oint_{\gamma_n} \frac{\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mu_1^{t_1} \ldots \mu_n^{t_n}}{(\lambda_1 - \mu_1) \ldots (\lambda_n - \mu_n)} g d\lambda_1 \ldots d\lambda_n = \Phi(\mu_1, \ldots$$

$$\ldots, \mu_n) \mu_1^{t_1} \ldots \mu_n^{t_n} g; \ [\Phi(K_1, \ldots, K_n) - \zeta I] \mu_1^{t_1} \ldots \mu_n^{t_n} g =$$

$$= [\Phi(\mu_1, \ldots, \mu_n) - \zeta I] \mu_1^{t_1} \ldots \mu_n^{t_n} g. \quad (3)$$

Рассмотрим пространство функций $\mu_1^{t_1} \ldots \mu_n^{t_n} g$ (g пробегает E). Очевидно, это подпространство пространства $L^n_{[0, \infty)}$. Пусть $\Phi_0(K_1, \ldots, K_n)$ — соответствующее сужение оператора $\Phi(K_1, \ldots \ldots, K_n)$. В силу равенства (3) $\Phi_0(K_1, \ldots, K_n)$ можно отождествить с оператором $\Phi(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Допуская существование ограниченного оператора $[\Phi(K_1, \ldots, K_n) - \zeta I]^{-1}$, приходим к противоречию. Для случая, когда все $\mu_j \neq 0$, теорема доказана.

Пусть теперь не все μ_j отличны от нуля (например, $\mu_1 = 0$). Рассмотрим функцию $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = d_1(t_1) \mu_2^{t_2} \ldots \mu_n^{t_n} g$, где

$$\alpha_1(t_1) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t_1 < 1; \\ 0, & t_1 \geqslant 1. \end{cases}$$

Нетрудно показать, опираясь на формулу (2), что в этом случае

$$\Phi(K_1, \ldots, K_n) \alpha_1(t_1) \mu_2^{t_2} \ldots \mu_n^{t_n} g = \Phi(0, \mu_2, \ldots, \mu_n \alpha_1(t_1) \ldots \mu_n^{t_n} g.$$

Теперь остается повторить рассуждения, приведенные в предыдущем случае. Теорема доказана полностью.

Замечание 1. Рассмотрим операторы сдвига $K_1, K_2, \ldots, K_n$ в пространстве $L^n_{(-\infty, +\infty)}$. Очевидно, $\sigma(K_j) = \{\mu : |\mu| = 1\}$ и справедливо утверждение: спектр оператора $\Phi(K_1, \ldots, K_n)$ совпадает с множеством точек спектра семейства операторов $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ при $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, пробегающих единичные окружности $|\lambda_j| = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$*.

Замечание 2. Теорема 2 и замечание 1 остаются в силе, если $L^n_{[0, \infty)}$, $L^n_{(-\infty, +\infty)}$ пространства функции $f(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, где каждая из переменных пробегает множество натуральных или множество целых чисел.

Замечание 3. Пусть L_E — пространство ограниченных последовательностей y_n элементов из E. Рассмотрим бесконечную операторную матрицу

---

* Для частного случая, когда $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — полином, это утверждение было получено ранее другим методом А. М. Биберман и Р. К. Романовским.

$$M=\begin{pmatrix} A_0\, A_1 \dots A_n \;\dots\;\; \dots \dots \\ 0\;\; A_0\;\; A_1\; \dots\; A_n \dots \;\dots \\ 0\;\; 0\;\; A_0\;\; A_1 \dots\; A_n \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix},$$

где A_j ($j=1,\ 2,\ \dots,\ n$) — ограниченные операторы, действующие в E. Пусть M определяет в L_E ограниченный оператор (для этого достаточно, например, чтобы $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\|A_j\|<\infty$). Введем в L_E оператор сдвига $K(y_0,\ y_1,\ \dots)=(y_1,\ y_2,\ \dots)$. Легко заметить, что $M=\sum\limits_{j=0}^{\infty}A_jK^j$. Из теоремы 2 и замечания 2 следует, что спектр матрицы M совпадает с множеством точек спектра оператор-функции $\sum\limits_{j=0}^{\infty}A_j\alpha^j$, где α пробегает единичный круг.

Пусть $P^n_{(-\infty,\,+\infty)}$ — пространство функций $f(t_1,\ \dots,\ t_n)$, значения которых принадлежат E, таких, что $f(t_1,\ \dots,\ t_n)\equiv f(t_1+N_1,\ \dots,\ t_n+N_n)$. Спектр оператора сдвига K_j в этом пространстве состоит из точек $\sqrt[N_j]{1}$.

Рассмотрим оператор $\Phi(K_1,\ \dots,\ K_n)$, определяемый формулой (2). Справедлива

Теорема 3. *Спектр оператора* $\Phi(K_1,\ \dots,\ K_n)$ *совпадает с множеством точек спектра семейства операторов* $\Phi(\mu_1,\ \dots,\ \mu_n)$, *где* μ_j *пробегает всевозможные значения* $\sqrt[N_j]{1}$ $(j=1,\ 2,\ \dots,\ n)$.

Доказательство. Согласно теореме 1 достаточно доказать, что при любом наборе $\mu_j=\sqrt[N_j]{1}$ $(j=1,\ \dots,\ n)$ каждая точка спектра оператора $\Phi(\mu_1,\ \dots,\ \mu_n)$ принадлежит спектру оператора $\Phi(K_1,\ \dots,\ K_n)$.

Пусть ζ — точка спектра оператора $\Phi(\mu_1,\ \dots,\ \mu_n)$ при некоторых фиксированных $\mu_j=\sqrt[N_j]{1}$ $\left(\mu_j=e^{\frac{2\pi m_j}{N_j}}\right)$. Возьмем произвольный вектор $g\in E$ и функцию $f(t_1,\ \dots,\ t_n)=e^{2\pi m_1/N_1}\dots e^{2\pi mn/Nn}g$. Очевидно, $f\in P^n_{(-\infty,\,+\infty)}$. Теперь достаточно повторить рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2.

Остановимся на некоторых применениях полученных результатов.

I. Рассмотрим сдедующую задачу:

$$K^m y(t,\ x_1,\dots,x_n)-\sum_{i=1}^{m-1}A_iK^iy-\Phi(K_1,\ \dots,\ K_n)\,y=f(t,\ x_1,\dots,\ x_n);$$
$$y\,|_{0\leqslant t<m\delta}=g(t,\ x_1,\ \dots,\ x_n);\quad 0\leqslant t<\infty;\quad -\infty<x_1,\ \dots,\ x_n<\infty. \tag{4}$$

Здесь $K, K_1, \ldots, K_n$ — разностные операторы: $Ky(t, x_1, \ldots, x_n) = y(t+\delta, x_1, \ldots, x_n)$; $K_j y(t, x_1, \ldots, x_n) = y(t, x_1, \ldots, x_j + \delta_j, \ldots, x_n)$; $y(t, x_1, \ldots, x_n)$; $f(t, x_1, \ldots, x_n)$; $g(t, x_1, \ldots, x_n)$ — вектор-функции, значения которых принадлежат E; A_i $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ — линейные операторы, действующие в E; $\Phi(K_1, \ldots, K_n)$ — оператор, определенный по формуле (2).

Теорема 4. *Для того, чтобы в задаче (4) любым ограниченным вектор-функциям $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ и $g(t, x_1, \ldots, x_n)$ соответствовало ограниченное решение $y(t, x_1, \ldots, x_n)$ (такую задачу мы будем называть устойчивой), необходимо и достаточно, чтобы все особые точки семейства оператор-функций*

$$\lambda^m I - \sum_{i=1}^{m-1} A_i \lambda^i - \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

при α_j, пробегающих единичные окружности, лежали внутри единичного круга (λ_0 называется особой точкой оператор-функции $\lambda^m I - \sum_{i=1}^{m-1} A_i \lambda^i - \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, если оператор $\lambda_0^m I - \sum_{i=1}^{m-1} A_i \lambda_0^i - \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ не имеет ограниченного обратного).

Доказательство. Задачу (4) можно представить в виде

$$\begin{cases} K^m W(t) - \sum\limits_{i=1}^{m-1} A_i K^i W(t) - MW(t) = F(t); \\ W|_{0 \leqslant t < m\delta} = G(t), \quad 0 \leqslant t < \infty, \end{cases} \tag{5}$$

где $W(t)$, $F(t)$, $G(t)$ — вектор-функции, значения которых принадлежат банахову пространству $L^n_{(-\infty, +\infty)}$; $M = \Phi(K_1, \ldots, K_n)$ — линейный оператор, действующий в этом пространстве. Согласно работе [3] задача (5) устойчива в том и только в том случае, если все особые точки оператора $\lambda^m I - \sum_{i=1}^{m-1} A_i \lambda^i - M$ лежат внутри единичного круга. Теперь легко заметить, что доказываемое утверждение вытекает из теоремы (2). Теорему 4 можно применить для исследования устойчивости неявных разностных схем. Рассмотрим, например, следующую разностную задачу:

$$\begin{cases} Ay_{n+1,\,k+1} + By_{n+1,\,k} - Cy_{n,\,k+1} - Dy_{n,\,k} = f_{n,\,k}; \\ y_{0,\,k} = \varphi_k; \quad n = 0, 1, 2 \ldots; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \end{cases} \tag{6}$$

где $y_{n,k}$, $f_{n,k}$, φ_k — функции, значения которых принадлежат E; A, B, C, D — линейные операторы, действующие в E. Задачу (6) перепишем в виде

$$(AK_2 + B)\, y_{n+1,\,k} - (CK_2 + D)\, y_{n,\,k} = f_{n,\,k};\ y_{0,\,k} = \varphi_k,\ K_2 y_{n,\,k} = y_{n,\,k+1}. \tag{7}$$

Пусть спектр семейства операторов $A\alpha + B$, где α пробегает единичную окружность, не содержит нулевой точки. Тогда согласно теореме 2 существует ограниченный оператор $(AK_2 + B)^{-1}$ и задача (7) имеет единственное решение. Воспользовавшись теоремой 3, можно сформулировать критерий устойчивости задачи (7): для того, чтобы задача (7) была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы спектр семейства операторов $(A\alpha + B)^{-1}(C\alpha + D)$ (α пробегает единичную окружность) лежал внутри единичного круга. Отметим, что, пользуясь методами, развитыми в работе [4], можно перенести полученные результаты на уравнения с переменными коэффициентами, обладающими слабой вариацией на бесконечности.

II. Теорему 2 можно также использовать при решении вопроса о существовании единственного ограниченного решения неоднородного разностного уравнения. В самом деле, рассмотрим разностное уравнение (4), которое можно переписать так:

$$[K^m - \sum_{i=1}^{m-1} A_i K^i - \Phi(K_1, \ldots, K_n)]\, y(t, x_1, \ldots, x_n) = f(t, x_1, \ldots, x_n). \tag{8}$$

Согласно теореме 2 спектр оператора

$$[K^m - \sum_{i=1}^{m-1} A_i K^i - \Phi(K_1, \ldots, K_n)]$$

совпадает с множеством точек спектра семейства операторов

$$\lambda^m I - \sum_{i=1}^{m-1} A_i \lambda^i - \Phi(\mu_1, \ldots, \mu_n) \tag{9}$$

(λ пробегает единичный круг; $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ — единичные окружности). Это означает, что верна

Теорема 5. *Для того, чтобы в уравнении* (8) *каждой ограниченной правой части* $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ ($t \geqslant 0; -\infty < x_1, \ldots, x_n < \infty$ *соответствовало единственное ограниченное (в этой же области) решение* $y(t, x_1, \ldots, x_n)$, *необходимо и достаточно, чтобы все особые точки семейства оператор-функций* (9) ($|\mu_j| = 1$) *лежали вне единичного круга.*

Замечание. Если уравнение (8) рассматривается в области $-\infty < t, x_1, \ldots, x_n < \infty$, то для справедливости утверждения теоремы необходимо и достаточно, чтобы множество особых точек семейства оператор-функций (9) не пересекалось с единичной окружностью.

Рассмотрим вновь уравнение (8). Из теоремы 3 вытекает

Теорема 6. *Для того, чтобы в уравнении* (8) *каждой периодической правой части* $f(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv f(t+N, x_1+N_1, \ldots, x_n+N_n)$ *соответствовало единственное периодическое решение* $y(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv y(t+N, x_1+N_1, \ldots, x_n+N_n)$, *необходимо и достаточно, чтобы точки* $\lambda = \sqrt[N]{1}$ *были регулярными для* *семейства оператор-функций* $\lambda^m I - \sum\limits_{i=1}^{m-1} A_i\lambda^i - \Phi(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ *при* μ_j, *пробегающих значения* $\mu_j = \sqrt[N_j]{1}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

III. Теорема 1 позволяет обобщить один результат М. Г. Крейна, связанный с решением некоторых операторных уравнений [2, с. 35—38]. Рассмотрим операторное уравнение

$$\sum_{j,\,k=0}^{n} C_{jk}A^{j}XB^{k} = Y. \tag{10}$$

Здесь A, B, Y, C_{jk} — заданные линейные операторы, действующие в E, причем C_{jk} перестановочны с A (но между собой, вообще говоря, — нет), x — искомый оператор. Уравнение вида (10) в случае, когда C_{jk} — скаляры, рассмотрено в работе [2]. Введем в пространстве $[E, E]$ операторов, действующих в E, следующие операторы $A_eX = AX$; $B_rX = XB$,

Операторы A_e и B_r перестановочны и их спектры совпадают соответственно со спектрами операторов A и B [см. 2]. Уравнение (10) переписываем в виде

$$\sum_{j,\,k=0}^{n} C_{jk}A_e^{j}B_r^{k}X = Y.$$

Согласно теореме 1 спектр оператора $\sum\limits_{j,\,k=0}^{n} C_{jk}A_e^{j}B_r^{k}$ содержится в спектре семейства операторов $\sum\limits_{j,\,k=0}^{n} C_{jk}\lambda^{j}\mu^{k}$, где λ и μ пробегают соответственно спектры операторов A_e и B_r. Исходя из этого, можно сформулировать достаточное условие существования единственного решения уравнения (10).

Теорема 7. *Если спектр семейства операторов* $\sum\limits_{j,\,k=0}^{n} C_{jk}\lambda^{j}\mu^{k}$ *при* $\lambda \in \sigma(A)$, $\mu \in \sigma(B)$ *не содержит нулевой точки, то уравнение* (10) *при каждой* правой *части* $Y \in [E, E]$ *имеет единственное решение, которое представим в виде*

$$X = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{2} \oint_{\gamma_A} \oint_{\gamma_B} \left(\sum_{j,\,k=0}^{n} C_{jk}\lambda^{j}\mu^{k}\right)^{-1} (A - \lambda I)^{-1}\, Y\, (B - \mu I)^{-1}\, d\lambda d\mu,$$

где γ_A, γ_B — произвольные контуры, окружающие спектры операторов A и B.

Список литературы: 1. *Мармерштейн И. И.* Об ограниченности решений некоторых уравнений в частных разностях.— Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 3, с. 475—478. 2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., Физматгиз, 1970. 534 с. 3. *Мармерштейн И. И.* Необходимый и достаточный критерий ограниченности решений некоторых систем линейных разностных уравнений в банаховом пространстве.— Изв. АН СССР. Серия мат.. 1971, т. 35, № 3, с. 704—713. 4. *Рутман М. А.* Об ограниченности решений некоторых линейных уравнений в частных разностях.— Докл. АН СССР, 1964, т. 159, № 2, с. 273—275.

Поступила 1 марта 1976 г.