УДК 517.535.4

С. В. ЛЬВОВА

О ВАЛИРОНОВСКИХ ДЕФЕКТАХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ГОЛОМОРФНЫХ КРИВЫХ НАД ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

В теории мероморфных функций вопрос о массивности множеств валироновских дефектных значений изучался многими авторами [1; 2; 3]. Наиболее значительным результатом в этом направлении является следующая теорема Альфорса [1]:

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция, $|z| \leqslant R < \infty$. Для произвольного значения ε $(0 < \varepsilon < 1/2)$ и для каждого значения a, исключая, быть может, множество значений емкости нуль, имеет место соотношение $m(R, a) = O(T(R)^{(1+\varepsilon)/2})$*.

В нашей работе приведены аналогичные результаты для функций, мероморфных в полуплоскости, и для кривых, голоморфных над полуплоскостью. Ввиду ограниченного объема статьи доказательства соответствующих теорем лишь намечены.

Введем необходимые обозначения. Пусть функция $f(z)$ $(f(z) \neq \neq 0)$ мероморфная в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Обозначим через $\overline{n}(R, R_0; f)$ (или $\overline{n}_f(R, f)$) число полюсов функции $f(z)$, лежащих во множестве $D = D(R, R_0) = \{z : |z - iR/2| \leqslant \leqslant R/2, \ |z| \geqslant R_0\}$, $R_0 < R < \infty$. Положим $\overline{N}(R, R_0; f) = \overline{N}(R; f) = \int\limits_{R_0}^{R} \frac{\overline{n}(t; f)}{t^2} dt = \sum\limits_{\rho_l e^{i\psi_l} \in D(R, R_0)} \left(\frac{\sin \psi_l}{\rho_l} - \frac{1}{R}\right)$, где $\rho_l e^{i\psi_l}$ — полюсы

*Здесь используются стандартные обозначения неванлинновской теории распределения значений мероморфных функций.

функции $f(z)$. Обозначим также $\overline{m}(R,\ R_0;\ f) = \overline{m}(R;\ f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)}^{\pi-\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)} \ln|f(Re^{i\theta}\sin\theta)| \frac{d\theta}{R\sin^2\theta}$, где $\varkappa(t) = \arcsin t$ и $\overline{T}(R,\ R_0;\ f) = \overline{T}(R;\ f) = \overline{m}(R;\ f) + \overline{N}(R;\ f)$.

Согласно формуле Б. Я. Левина [5, с. 41] в случае, когда на полуокружности $|z| = R_0$, $\operatorname{Im} z > 0$ нет ни корней, ни полюсов функции $f(z) - a$, справедливо равенство

$$N(R;\ 1/f - a) - N(R;\ f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)}^{\pi-\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)} \ln|f(Re^{i\theta}\sin\theta) - a| \frac{d\theta}{R\sin^2\theta} + Q(R,\ R_0;\ f - a); \tag{1}$$

где $Q(R,\ R_0;\ f - a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)}^{\pi-\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)} \left\{ \ln|f(R_0e^{i\theta}) - a| \left(-\frac{\sin\theta}{R_0^2}\right) - \left(\frac{\sin\theta}{R_0} - \frac{1}{R}\right) \times \frac{\partial}{\partial R_0} \ln|f(R_0e^{i\theta}) - a| \right\} \times R_0 d\theta$. В общем случае, выбирая число R_0' $(R_0 < R_0')$ так, чтобы полуокружность $|z| = R_0$, $\operatorname{Im} z > 0$, была свободна от полюсов и корней функции $f(z) - a$, получаем, что

$$\overline{N}(R;\ 1/f - a) - \overline{N}(R;\ f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)}^{\pi-\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)} \ln|f(Re^{i\theta}\sin\theta) - a| \frac{d\theta}{R\sin^2\theta} + Q(R,\ R_0,\ R_0';\ f - a),$$

где

$$Q(R,\ R_0,\ R_0';\ f - a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)}^{\pi-\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)} \left\{ \ln|f(R_0'e^{i\theta}) - a| \left(-\frac{\sin\theta}{R_0'^2}\right) - \left(\frac{\sin\theta}{R_0'} - \frac{1}{R}\right) \times \frac{\partial}{\partial R_0} \ln|f(R_0'e^{i\theta}) - a| \right\} R_0' d\theta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)}^{\varkappa\left(\frac{R_0'}{R}\right)}\ln|f(Re^{i\theta}\sin\theta)-a|\frac{d\theta}{R\sin^2\theta}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi-\varkappa\left(\frac{R_0'}{R}\right)}^{\pi-\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)}\ln|f(Re^{i\theta}\sin\theta)-$$

$$-a|\frac{d\theta}{R\sin^2\theta}+\sum_{r_ke^{i\varphi_k}\in D\setminus D'}\left(\frac{\sin\varphi_k}{r_k}-\frac{1}{R}\right)-\sum_{\rho_l e^{i\psi_l}\in\ \setminus D'}\left(\frac{\sin\psi_l}{\rho_l}-\frac{1}{R}\right). \quad (2)$$

$D'=\left\{z:\left|z-\frac{iR}{2}\right|\leqslant\frac{R}{2},\ |z|\geqslant R_0,\ r_ke^{i\;\;k}\right.$ — нули, $\rho_l e^{i\psi_l}$ — полюсы функции $f(z)-a$.

Теорема 1. *Пусть $f(z)\not\equiv 0$ — функция, мероморфная в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ и аналитическая в начале координат. Тогда для каждого a, исключая самое большее множество значений емкости нуль и для каждого $\varepsilon\,(0<\varepsilon<1/2)$ при $R\to\infty$ имеет место соотношение $\overline{\boldsymbol{m}}(R,\ a)=O(\overline{\boldsymbol{T}}(R)^{1+\varepsilon/2})$.*

Наметим доказательство этой теоремы. Оно проводится по той же схеме, что и доказательство цитированной выше теоремы Альфорса. При реализации указанной схемы возникает необходимость в получении аналога соотношения Картана—Фростмана [4, с. 180] для функций, мероморфных в полуплоскости, и оценка его остаточного члена.

Пусть E — ограниченное замкнутое множество в C; $A\sup\limits_{a\in A}|a|$; γ_E — постоянная Робэна множества E; μ — мера Робэна на множестве E.

Непосредственно из формулы (2) получаем

$$\overline{\boldsymbol{N}}(R;\ f)-\int_E Q(R,\ R_0,\ R_0';\ 1/f-a)\,d\mu(a)=\int_E\overline{\boldsymbol{N}}(R;\ f-a)\,d\mu(a)+$$

$$+\int_E\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)}^{\pi-\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)}\ln\frac{1}{|f(Re^{i\theta}\sin\theta)-a|}\,\frac{d\theta}{R\sin^2\theta}\right\}d\mu(a), \quad (3)$$

где $R_0'(a)$ — какое-нибудь из чисел $R_0'>R_0$ таких, что на полуокружности $|z|=R_0'$, $\operatorname{Im} z>0$, нет ни корней, ни полюсов $f(z)-a$.

Соотношение (3) является аналогом упомянутого выше соотношения Картана — Фростмана. Оценка его остаточного члена будет проведена при фигурирующем в теореме дополнительном предположении аналитичности функции $f(z)$ в какой-либо окрестности начала координат. Не нарушая общности, далее предполагаем, что функция $f(z)$ аналитична при $|z|\leqslant 3eR_0$.

Необходимые оценки являются следствием следующих лемм, которые приводятся здесь без доказательств.

Лемма 1. *Существует определенная на E функция $R_0'(a)$. $R_0 \leqslant R_0'(a) \leqslant 3R_0$ и число $\delta > 0$ такие, что $|f(R(a)e^{i\theta}) - a| > \delta$, $\forall\theta \in [0, 2\pi]$, $a \in E$.*

В следующих леммах через C_k $(k = 1, \ldots 6)$ обозначены положительные величины, зависящие от A, R_0 выбора $f(z)$, но не зависящие от R.

Лемма 2. *Пусть $R_0'(a)$ — функция, существование которой утверждается в лемме 1. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_E\left\{\int\limits_{\varkappa\left(\frac{R_0'(a)}{R}\right)}^{\pi-\varkappa\left(\frac{R_0'(a)}{R}\right)}\left[\ln\frac{1}{|f(R_0'e^{i\theta})-a|}\left(-\frac{\sin\theta}{R_0'^2}\right)+\left(\frac{1}{R}-\frac{\sin\theta}{R_0'}\right)\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{\partial}{\partial R_0'}\ln\frac{1}{|f(R_0'e^{i\theta})-a|}\right]\times R_0'd\theta\right\}d\mu(a) \leqslant C_1.$$

Лемма 3. *Справедлива оценка*

$$\left|\int\limits_E \sum_{r_{k(a)}e^{i\varphi_{k(a)}} \in D \setminus D'} \left(\frac{\sin\varphi_{k(a)}}{r_{k(a)}} - \frac{1}{R}\right) d\mu(a) \leqslant C_2 + \gamma_E/2R_0.\right.$$

Лемма 4. *Имеет место оценка*

$$\left|\int\limits_E \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)}^{\varkappa\left(\frac{R_0'}{R}\right)} \ln\frac{1}{|f(Re^{i\theta}\sin\theta)-a|}\,\frac{d\theta d\mu(a)}{R\sin^2\theta}\right| +$$

$$+\left|\int\limits_E \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi-\varkappa\left(\frac{R_0'}{R}\right)}^{\pi-\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)} \ln\frac{1}{|f(Re^{i\theta}\sin\theta)-a|}\,\frac{d\theta d\mu(a)}{R\sin^2\theta}\right| \leqslant |\gamma_E|C_4 + C_5.$$

Из перечисленных лемм непосредственно следует необходимая оценка остаточного члена, а именно

Лемма 5. *Из этой оценки и из формулы* (3), *учитывая, что $|a| \leqslant A$, $\forall a \in E$, получим $\overline{\boldsymbol{T}}(R;\ f) \leqslant \int\limits_E \overline{\boldsymbol{N}}(R;\ f-a)\,d\mu(a) + C_7|\gamma_E| + C_5$. Теперь, повторив в существенном рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы Альфорса, получаем теорему 1.*

Для формулировки соответствующих теорем о голоморфных кривых над полуплоскостью введем необходимые обозначения.

Число нулей голоморфной функции $(\vec{G}(z), \vec{A})$ в области $\{|z -$

$-\frac{iR}{2}\Big|\leqslant\frac{R}{2}$, $|z|\geqslant R_0$ обозначим через $n^*(R;\ \vec{A},\ \vec{G})$. Положим далее

$$N^*(R;\ \vec{A},\ \vec{G})=\int\limits_{R_0}^{R}\frac{n^*(t;\ \vec{A},\ \vec{G})}{t^2}\,dt,\ R_0<R<\infty.$$

Определим функции $m^*(R;\ \vec{A},\ \vec{G})$ и $T^*(R;\ \vec{G})$ посредством равенств

$$m^*(R;\ \vec{A},\ \vec{G})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)}^{\pi-\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)}\ln\frac{\|\vec{G}(Re^{i\theta}\sin\theta)\|\,\|\vec{A}\|}{|(\vec{G}(Re^{i\theta}\sin\theta),\ \vec{A})|}\,\frac{d\theta}{R\sin^2\theta},$$

$$T^*(R;\ \vec{G})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)}^{\pi-\varkappa\left(\frac{R_0}{R}\right)}\|\vec{G}(Re^{i\theta}\sin\theta)\|\,\frac{d\theta}{R\sin^2\theta},$$

где $\|\vec{G}\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}|g_i(z)|^2}$.

Из формулы Б. Я. Левина [5] следует, что имеет место аналог первой основной теоремы для голоморфных кривых над полуплоскостью, а именно

Теорема. *Для всех допустимых векторов* $\vec{A}\in C^n$ *при* $R\to\infty$ *справедливо равенство* $T^*(R,\ \vec{G})=m^*(R;\ \vec{A},\ \vec{G})+N^*(R;\ \vec{A},\ \vec{G})+O(1)$.

Исключительные множества в пространстве C^n векторов будем характеризовать введенными Л. И. Ронкиным понятием Г-емкости [6].

Теорема 2. *Пусть* $\vec{G}(z)$ — *кривая, голоморфная в полуплоскости* $\operatorname{Im} z>0$. *Для любого* $\vec{A}\in C^n$, *кроме, может быть, множества Г-емкости нуль и любого* $\varepsilon\,(0<\varepsilon<1/2)$, *имеет место соотношение* $m^*(R;\ \vec{A})=O\,(T^*(R))^{(1+\varepsilon)/2}$

Доказательство этой теоремы в существенном повторяет доказательство теоремы 1. При этом вместо постоянной Робэна используется введенное С. Ю. Фаворовым [7] понятие H-емкости. Это понятие, которое С. Ю. Фаворов ввел отправляясь от упомянутого выше понятия Г-емкости, обладает некоторыми свойствами, близкими к свойствам γ_E^{-1}. Так, С. Ю. Фаворовым было доказано:

1) для любого конечного или счетного семейства компактов $\{E_n\}$ из единичного полукруга U^m имеет место неравенство

$$H_m(\bigcup_n E_n) \leqslant \sum_n H_m(E_n);$$

2) для любого компакта $F \subset U^m$ положительной Г-емкости найдется такая, сосредоточенная на F мера μ, $\mu(F) = 1$, что для любой точки $\vec{A} \in C^n$ выполняется неравенство

$$\int \ln \frac{\max\{1, |w_1|, \ldots, |w_m|\}}{|1 + z_1w_1 + \cdots + z_mw_m|} d\mu(z) \leqslant 3^{m-1}H_m^{-1}(F).$$

Именно наличие этих свойств и позволяет перенести на многомерный случай доказательство теоремы 1.

* В заключение отметим, что всюду выше использовались характеристики поведения функции в полуплоскости, введенные Цудзи. Другого вида характеристики были введены Р. Неванлинной. Нетрудно видеть, что теоремы 1 и 2 остаются справедливыми при замене в них характеристик Цудзи характеристиками Р. Неванлинны.

Автор выражает благодарность Л. И. Ронкину за руководство работой.

Список литературы: 1. *Ahlfors L.* Ein Satz von Henri Cartan und seine Anwendung auf die Theorie der meromorphen Funktionen. — Soc. sci. fenn. Comment Phys. math., 1931, Bd 15, N 16, S. 47—51. 2. *Valiron G.* Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions meromorphes. — Acta math., 1925 v. 47, p. 11—18. 2. *Nevanlinna R.* Le theoreme de Picard-Borel meromorphes. Paris. Gauthier-Villars. 1929. 231 p. 4. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М., ГИТТЛ, 1941. 382 с. 5. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., Наука, 1970. 591 с. 6. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. М., Наука, 1971. 430 с. 7. *Фаворов С. Ю.* О емкостных характеристиках множеств в E^n. ВИНИТИ. Деп. 1974, № 1763—74, с. 1—50.

Поступила 15 марта 1977 г.