УДК 513.86

В. И. ЛОМОНОСОВ

СОВМЕСТНЫЙ АППРОКСИМАТИВНЫЙ СПЕКТР КОММУТАТИВНОГО СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

Как известно, любое коммутативное семейство линейных операторов в конечномерном пространстве имеет общий собственный вектор. Обобщая это предложение на случай бесконечномерного пространства, Ю. И. Любич ввел понятие совместного аппроксимативного спектра* [1] для семейства коммутирующих операторов в банаховом пространстве и доказал, что он непуст, когда это семейство счетно (или сепарабельно по операторной норме). Последнее ограничение, как показывают примеры, существенно.

В этой работе мы исходим из определения, пригодного для семейств любой мощности и совпадающего с определением Ю. И. Любича в случае, когда семейство операторов сепарабельно. Далее вводится понятие отделимости совместного аппроксимативного спектра операторной алгебры и доказывается, что отделимость имеет место, если образующими алгебры являются операторы с отделимым спектром [2; 3]. Теоремы 1.1, 2.1 и 2.2 настоящей работы содержатся в статьях В. Желязко [4] и И. Доамра, Л. Линдаля [5], но были получены нами независимо [6]. Наш подход отличен от подхода упомянутых авторов и, на наш взгляд, дает более полные результаты, например, погружение любого «аппроксимативного» идеала в максимальный такой идеал (теорема 1.2).

1. Основные свойства совместного аппроксимативного спектра

Определение. *Совместным аппроксимативным спектром $\sigma_a(C)$ коммутативного семейства C операторов, действующих в банаховом пространстве B, называется множество комплекснозначных функций $f_C(A)$, $A \in C$, каждой из которых отвечает обобщенная последовательность векторов $\{x_\alpha\}$, обладающая следующими свойствами:* 1) $\overline{\lim_\alpha} \| x_\alpha \| > 0$; 2) для любого оператора $A \in C$ $\lim_\alpha \| (A - f_C(A) I) x_\alpha \| = 0$.

Теорема 1.1. *Совместный аппроксимативный спектр семейства C является непустым множеством.*

Доказательство. В работе Ю. И. Любича [1] было показано, что для каждого конечного коммутативного операторного семейства C_n $\sigma_a(C_n)$ непуст и замкнут в топологии поточечной сходимости на C_n и, кроме того, сужениями функций из $\sigma_a(C_n)$ на семейство C_{n-1}, $C_{n-1} \subset C_n$ исчерпываются все функции из $\sigma_a(C_{n-1})$. Пусть C_β — множество всех подмножеств семейства C и $\Phi = \bigcup_\beta \sigma_a(C_\beta)$. Частично упорядочим множество Φ, полагая $f_{C_{\beta_1}}(A) < f_{C_{\beta_2}}(A)$, если $C_{\beta_1} \subset C_{\beta_2}$ и $f_{C_{\beta_1}}(A) = f_{C_{\beta_2}}(A)$ при $A \subset C_{\beta_1}$. Рассмотрим какое-нибудь линейно упорядоченное подмножество $\{f_{C_w}(A)\}$, $(w \subset \Omega)$, множества Φ. Пусть $\{x_\alpha^w\}$ — обобщенные после-

* Мы используем термин «совместный аппроксимативный спектр», вместо термина Ю. И. Любича «совместный существенный спектр».

довательности, отвечающие функциям $f_{C_w}(A)$. Легко видеть, что функция $f_{\bigcup\limits_w C_w}(A)$, определенная на $\bigcup\limits_w C_w$ равенствами $f_{\bigcup\limits_w C_w}(A) = f_{C_w}(A)$, $(A \in C_w)$, содержится в $\sigma_a(\bigcup\limits_w C_w)$, поскольку ей отвечает обобщенная последовательность $\{x_\alpha^w\}$ соотношением порядка $x_\alpha^{w_1} < x_\alpha^{w_2}$, если $w_1 < w_2$. Кроме того, функция $f_{\bigcup\limits_w C_w}(A)$ является мажорантой множества $\{f_{C_w}(A)\}$. Поэтому в силу леммы Цорна Φ содержит некоторый максимальный элемент $f_{C'}(A)$. Пусть $C \ni A_0 \bar{\ni} C'$. Для любого конечного подмножества $C_n \subset C'$ множество $F(C_n)$ чисел λ таких, что $\lambda \in \sigma_a(C_n \cup A_0)$, является непустым замкнутым подмножеством стектра оператора A_0. Множества $F(C_n)$ образуют центрированную систему на компакте $\sigma(A_0)$ и, следовательно, существует точка λ, принадлежащая им всем. Функция $f(A)$, определенная на $A_0 \cup C'$ соотношениями $f(A_0) = \lambda$; $f(A) = f_{C'}(A)$, $A \in C'$, содержится в совместном аппроксимативном спектре семейства $\{A_0 \cup C'\}$ и мажорирует функцию $f_{C'}(A)$. Это противоречно показывает, что $C' = C$. Тем самым теорема 1.1 доказана.

Легко показать, что все функции из $\sigma_a(C)$ являются линейными мультипликативными функционалами на семействе C. Докажем, например, последнее свойство. Пусть операторы A_1, A_2, A_1A_2 содержатся в C; $f_C(A)$ — какая-нибудь функция из $\sigma_a(C)$ и $\{x_\alpha\}$ — соответствующая ей обобщенная последовательность. Из соотношений $\|(A_1A_2 - f_C(A_1) f_C(A_2) I) x\| \leqslant \|A_1(A_2 - f_C(A_2) I) x + f_C(A_2)(A_1 - f_C(A_1) I) x\| \leqslant \|A_1\| \|(A_2 - f_C(A_2) I) x\| + |f_C(A_2)| \times \|(A_2 - f_C(A_2) I) x\|$, справедливых для любого вектора $x \in B$ вытекает, что $\overline{\lim\limits_\alpha} \|(A_1A_2 - f_C(A_1) f_C(A_2) I) x_\alpha\| = 0$. Поэтому $0 = \overline{\lim\limits_\alpha} \|(A_1A_2 - f_C(A_1) f_C(A_2) I) x_\alpha\| \geqslant \overline{\lim\limits_\alpha} \|(f_C(A_1) f_C(A_2) x_\alpha - f_C(A_1A_2) x_\alpha\| - \overline{\lim\limits_\alpha} \|(A_1A_2 - f_C(A_1A_2) I) x_\alpha\| = |f_C(A_1) f_C(A_2) - f_C(A_1A_2)| \overline{\lim\limits_\alpha} \|x_\alpha\|$. Это означает, что $f_C(A_1) f_C(A_2) = f_C(A_1A_2)$.

Кроме того, для любого оператора $A \in C$, $f_C(A) \in \sigma(A)$, поэтому $|f_C(A)| \leqslant \|A\|$. Таким образом, $f_C(A)$ — ограниченный линейный мультипликативный функционал на семействе C.

Каждому конечному набору операторов $A_1, \ldots, A_n$ и рациональному $\varepsilon > 0$ поставим в соответствие вектор $x \in B$ такой, что $\|(A_i - f_C(A_i) I) x\| < \varepsilon$, $\|x\| = 1$. Легко видеть, что все такие x составляют обобщенную последовательность, соответсвующую функции $f_C(A)$, и мощность этой последовательности не больше мощности всех конечных подмножеств C, то есть мощности самого C. Если C' — плотное в C подмножество C, то функцию

$f_C(A)$ можно сначала задать на C', а затем по непрерывности распространить на C. Поэтому обобщенную последовательность $\{x_\alpha\}$, отвечающую функции $f_C(A)$, можно выбрать так, чтобы ее мощность не превосходила мощности C'. В случае, когда семейство C сепарабельно по операторной норме, из утверждений этого параграфа вытекает существование комплекснозначной функции $f(A)$, определенной на семействе C, и последовательности векторов $\{x_n\}$ таких, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| x_n \| > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \| (A - f(A) I) x_n \| = 0$$

для любого оператора $A \in C$. Этот результат получен Ю. И. Любичем в работе [1].

Пусть C_1, C_2 — коммутативные семейства операторов и $C_1 \subset C_2$. Тогда ясно, что ограничение любого элемента из $\sigma_a(C_2)$ на C_1 задает элемент из $\sigma_a(C_1)$. Рассуждения теоремы 1.1 показывают, что таким путем могут быть получены все элементы $\sigma_a(C_1)$, т. е. справедлива

Теорема 1.2. *Функция $f(A) \in \sigma_a(C_1)$ продолжается до функции $\hat{f}(A) \in \sigma_a(C_2)$, если $C_1 \subset C_2$. В частности, для любого оператора $A_0 \subset C$ множество $f(A_0)$, когда $f(A)$ пробегает $\sigma_a(C)$, совпадает с аппроксимативным спектром оператора A_0.*

2. Совместный аппроксимативный спектр операторной алгебры как подмножество ее пространства максимальных идеалов

Пусть семейство C является коммутативной нормированной алгеброй операторов, действующих в B. Тогда $\sigma_a(C)$ можно отождествить с некоторым подмножеством пространства максимальных идеалов алгебры C.

Теорема 2.1. $\sigma_a(C)$ — *замкнутое подмножество пространства максимальных идеалов алгебры C.*

Доказательство. Пусть максимальный идеал $m_0 \overline{\in} \sigma_a(C)$. Тогда в силу определения $\sigma_a(C)$ найдется конечный набор операторов $A_1, \ldots, A_n$ из C и положительное ε, для которых неравенство

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant n} \| (A_i - A_i(m_0) I) x \| \geqslant \varepsilon \| x \|$$

выполняется при всех $x \in B$. Если

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant n} | A_i(m) - A_i(m_0) | < \varepsilon/2$$

для некоторого максимального идеала m, то

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant n} \| (A_i - A_i(m) I) x \| \geqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \| (A_i - A_i(m_0) I) x \| -$$

$$- \sup_{1\leqslant i\leqslant n} | A_i(m_0) - A_i(m) | \, \| x \| \geqslant \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}\right) \| x \| = \frac{\varepsilon}{2} \| x \|$$

при всех $x \in B$. Таким образом, дополнение к $\sigma_a(C)$ является открытым множеством, т. е. $\sigma_a(C)$ — замкнутое.

Если алгебра C_1 является замкнутой подалгеброй алгебры C_2, то в силу теоремы 1.2 каждый максимальный идеал $m \in \sigma_a(C_1)$ содержится в некотором максимальном идеале $\hat{m} \in \sigma_a(C_2)$. Как известно, этим свойством обладают максимальные идеалы границы Шилова.

Теорема 2.2. *Совместный аппроксимативный спектр алгебры C содержит ее границу Шилова* $\Gamma(C)$.

Доказательство. Пусть максимальный идеал $m_0 \in \Gamma(C)$ и $m_0 \overline{\in} \sigma_a(C)$. Тогда найдется оператор $A \in C$ такой, что $A(m_0) = 1$ и $\sup\limits_{m \in \sigma_a(C)} |A(m)| \leqslant 1/2$. Это означает, что аппроксимативный спектр оператора A лежит в круге $|z| \leqslant 1/2$. Так как все точки топологической границы $\sigma(A)$ содержатся в аппроксимативном спектре оператора A, то $\sigma_a(A)$ целиком лежит в круге $|z| \leqslant 1/2$. Вместе с тем

$$\sup_{z \in \sigma(A)} |z| = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \geqslant |A(m_0)| = 1.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Пример алгебры C, порожденной степенями нормального оператора, спектр которого совпадает с кругом $|z| \leqslant 1$, показывает, что $\sigma_a(C)$, вообще говоря, шире границы Шилова алгебры C.

Чисто кольцевой пример строгого включения границы Шилова в $\sigma_a(C)$ приведен в работе [7].

3. Алгебры, порожденные операторами с отделимым спектром

Покажем, что отделимость спектра образующих является достаточным условием регулярности алгебры, а также исследуем сильную отделимость совместного аппроксимативного спектра.

Вначале напомним определение оператора с отделимым спектром [2; 3]. Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве B. Будем говорить, что спектр оператора A отделим, если каждому компакту $F \subset \sigma(A)$ отвечает подпространство $M_F(A)$, обладающее следующими свойствами: 1) $M_F(A)$ — инвариантно для A; 2) $F \supset \sigma(A|_{M_F(A)})$; 3) если подпространство L обладает свойствами 1, 2, то $L \subset M_F(A)$; 4) $\operatorname{int} F \subset \sigma(A|_{M_F(A)})$; 5) если $\sigma(A) = \bigcup\limits_1^n \operatorname{int} F_i$, то

$$B = \overline{\sum_1^n M_{F_i}(A)}.$$

Будем говорить, что спектр оператора A сильно отделим [ср. 3, теорема 4], если оператор обладает свойствами 1—4 оператора с отделимым спектром и, кроме того, для любого набора компактов $F_i \subset \sigma(A)$ таких, что $\sigma(A) = \bigcup\limits_1^n \operatorname{int} F_i$ существует набор операторов P_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, обладающих такими свойствами: 1) операторы P_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ принадлежат нормированной алгебре $S(A)$, порожденной оператором A и всеми его резольвентами; 2) $\operatorname{Im} P_i \subset \subset M_{F_i}(A)$; 3) $\sum\limits_1^n P_i = I$; 4) Если $F_i \cap F_j = \varnothing$, то $\operatorname{Ker} P_i \supset M_{F_j}(A)$.

Рассмотрим коммутативную нормированную алгебру R с единицей и образующими g_α.

Теорема 3.1. *Если спектр оператора умножения на g_α отделим при всех α, то алгебра R регулярна.*

Доказательство. Пусть η — замкнутое подмножество пространства максимальных идеалов M и $m_0 \bar{\in} \eta$. Без ограничения общности можно считать, что все образующие g_α содержатся в идеале m_0. Из компактности η следует существование конечного набора образующих $g_{\alpha_1}, \ldots, g_{\alpha_n}$ и положительного ε таких, что для любой точки $m \in \eta$ $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |g_i(m)| > \varepsilon$. Положим $F_1 = \{z : : |z| \leqslant \varepsilon/2\}$ и $F_2 = \{z : \varepsilon/3 \leqslant |z| \subset \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \|g_{\alpha_i}\|\}$. Тогда $\sigma(g_\alpha) \subset \subset \operatorname{Int} F_1 \cup \operatorname{Int} F_2$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

В силу свойства 4 оператора с отделимым спектром существуют в R элементы g_i^1 и g_i^2; $1 \leqslant i \leqslant n$, удовлетворяющие соотношениям: 1) $\| g_i^1 + g_i^2 - e \| < 1/2$; 2) $g_i^k = (g_{\alpha_i} - \lambda e) f_i^k(\lambda)$, $k = 1, 2$, где $f_i^k(\lambda)$ — функция со значениями в R, голоморфная на $C \setminus F_k \cup \cup C \setminus \sigma(g_{\alpha_i})$. Тогда $g_i^2(m_0) = -\lambda (f_i^2(\lambda))(m_0)$ и $(f_i^2(\lambda))(m_0) = = -\dfrac{g_i^2(m_0)}{\lambda}$. Функция $(f_i^2(\lambda))(m_0)$ голоморфна при $|\lambda| < \varepsilon/3$, поэтому $g_i^2(m_0) = 0$, следовательно, $|g_i^1(m_0)| \geqslant |1 - g_i^2(m_0)| - 1/2 = = 1/2$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Пусть $m \in \eta$. Тогда при некотором i $|g_i(m)| > \varepsilon$. Аналогично предыдущему $(f_i^1(\lambda))(m) = \dfrac{g_i^1(m)}{g_i(m) - \lambda}$.

Так как $(f_i^1(\lambda))(m)$ голоморфна при $|\lambda| > \varepsilon/2$, то $g_i^1(m) = 0$. Таким образом, для любой точки $m \in \eta$ при некотором i $g_i^1(m) = 0$.

Положим $g = \prod\limits_1^n g_i^1$. Тогда $g(m_0) = \prod\limits_1^n g_i^1(m_0) \neq 0$ и $g(m) = 0$ при всех $m \in \eta$. Это означает, что алгебра R — регулярна.

Пусть L — подпространство, инвариантное для всех операторов алгебры C, а $f(A|_L)$ — какая-нибудь функция из $\sigma_a(C|_L)$. Легко видеть, что функция $\hat{f}(A)$, задаваемая равенствами $\hat{f}(A) = f(A|_L)$,

$A|_L \neq 0$, и $\hat{f}(A) = 0$, $A|_L = 0$, принадлежит множеству $\sigma_a(C)$. Тем самым $\sigma_a(C|_L)$ однозначно отвечает некоторое подмножество $\sigma_a(C)$. В дальнейшем мы будем их отождествлять.

Следующее определение отделимости совместного аппроксимативного спектра $\sigma_a(R)$ коммутативной нормированной алгебры R линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве B, является естественным обобщением понятия сильной отделимости спектра у одного оператора.

Пусть $S(R)$ — нормированная алгебра, порожденная рациональными функциями от операторов из R. Будем говорить, что совместный аппроксимативный спектр алгебры R сильно отделим, если каждому замкнутому подмножеству $F \subset \sigma_a(R)$ отвечает подпространство M_F, обладающее свойствами: 1) подпространство M_F инвариантно для всех операторов алгебры $S(R)$; 2) $\sigma_a(R|_{M_F}) \subset F$; 3) если подпространство обладает свойствами 1, 2, то $L \subset M_F$; 4) $\sigma_a(R|_{M_F}) \supset \operatorname{int} F$ (здесь и в дальнейшем $\operatorname{int} F$ для $F \subset \sigma_a(R)$ обозначает внутренность множества F в топологии, индуцированной на $\sigma_a(R)$ из пространства максимальных идеалов алгебры R); 5) если $\sigma_a(R) = \bigcup\limits_1^n \operatorname{int} F_i$, то существуют операторы $P_1, \ldots, P_n \in S(R)$ такие, что

$$\sum_1^n P_i = I, \quad \operatorname{Im} P_i \subset M_{F_i}, \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Подпространства M_F мы будем называть спектральными подпространствами для алгебры R.

Теорема 3.2. *Если в коммутативной нормированной алгебре R операторов, действующих в банаховом пространстве B, есть система образующих T_β, каждая из которых является оператором с сильно отделимым спектром, то совместный аппроксимативный спектр алгебры R сильно отделим.*

Для доказательства теоремы нам понадобится

Лемма 3.1. *Пусть максимальный идеал $m_0 \in \sigma_a(R)$; $\{x_\alpha\}$ — соответствующая ему обобщенная последовательность; η — замкнутое подмножество $\sigma_a(R)$ такое,* что $m_0 \bar{\in} \eta$. Тогда, в условиях теоремы 3.2 существует оператор $P \in S(R)$, обладающий следующими свойствами: 1) $\{P x_\alpha\}$ — также обобщенная последовательность, отвечающая идеалу m_0; 2) $\eta \cap \sigma_a(R|_{\overline{\operatorname{Im} P}}) = \varnothing$; 3) найдется окрестность $u \ni m_0$ такая, что $u \cap \eta = \varnothing$, $u \cap \sigma_a(R|_{\overline{\operatorname{Im}(I-P)}}) = \varnothing$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что все образующие, кроме I, содержатся в идеале m_0. Из компактности η вытекает существование конечного набора образующих $T_{\beta_1}, \ldots, T_{\beta_n}$ и $\varepsilon > 0$ таких, что для любого идеала $m \in \eta$ справедливо неравенство

$$\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |T_{\beta_i}(m)| > 5\varepsilon. \tag{3.1}$$

Рассмотрим множества $F_i^1 = \{z : |z| \leqslant 4\varepsilon,\ z \in \sigma(T_{\beta_i})\}$; $F_i^2 = \{z : |z| \geqslant 3\varepsilon,\ z \in \sigma(T_{\beta_i})\}$; $F_i^3 = \{z : |z| \leqslant 2\varepsilon,\ z \in \sigma(T_{\beta_i})\}$; $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Пусть P_i^1, P_i^2 — разложение операторной единицы, отвечающее разбиению спектра оператора T_{β_i} на множества F_i^1, F_i^2 $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Положим $P = \prod\limits_1^n P_i^1$. Справедливость второго утверждения леммы следует из неравенства (3.1) и соотношения $\operatorname{Im} P \subset \bigcap\limits_1^n M_{F_i^1}(T_{\beta_i})$. Предположим, что $\overline{\lim\limits_{\alpha}} \| P_1^1 x_\alpha \| = 0$. Тогда $\{(1 - P_1^1) x_\alpha\}$ является обобщенной последовательностью, отвечающей идеалу m_0, и $\{(1 - P_1^1) x_\alpha\} \subset M_{F_1^2}$. Это противоречит тому, что $0 \overline{\in} \sigma (T_{\beta_1}|_{M_{F_1^2}(T_{\beta_1})})$. Поэтому $\overline{\lim\limits_{\alpha}} \| P_1^1 x_\alpha \| > 0$. Повторяя это рассуждение n раз, получаем, что $\overline{\lim\limits_{\alpha}} \| P x_\alpha \| > 0$, т. е. $\{P x_\alpha\}$ — обобщенная последовательность, отвечающая идеалу m_0.

Операторы P_i^1 являются тождественными на подпространствах $M_{F_i^3}(T_{\beta_i})$. Поэтому

$$\operatorname{Ker}(I - P) \supset \bigcap_1^n M_{F_i^3}(T_{\beta_i}). \tag{3.2}$$

Пусть u — окрестность m_0, задаваемая неравенствами $|T_{\beta_i}(m) - T_{\beta_i}(m_0)| < \varepsilon$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Предположим, что $u \cap \sigma_a (R|_{\overline{\operatorname{Im}(I-P)}}) \neq \varnothing$. Тогда существует максимальный идеал m_1, содержащийся в этом пересечении, и обобщенная последовательность $\{x_\alpha\}$, вообще говоря не ограниченная, для которой $\{(I - P) x_\alpha)$ — обобщенная последовательность, отвечающая m_1. Аналогично конструкции оператора P можно построить оператор P' такой, что

$$\operatorname{Im} P' \subset \bigcap_1^n M_{F_1^3}(T_{\beta_i})$$

и $\{P'(I - P) x_\alpha\}$ — обобщенная последовательность, отвечающая m_1. Так как операторы P и P' принадлежат $S(R)$, то в силу выражения (3.2) $P'(I - P) = (I - P) P' = 0$.

Полученное противоречие доказывает третье утверждение леммы. Заметим, что попутно доказано следующее утверждение. Если спектральное подпространство $M_F \subset \operatorname{Ker} P$, где оператор $P \in S(R)$, то $\operatorname{int} F \cap \sigma_a (R|_{\overline{\operatorname{Im} P}}) = \varnothing$.

Пусть F — замкнутое подмножество $\sigma_a(R)$. Множество 0_F подпространств, обладающих свойствами 1, 2 спектрального подпространства, непусто, например, оно содержит нулевое подпространство. Обозначим через $\overset{0}{M}_F$ замыкание линейной оболочки подпространств 0_F. Ясно, что подпространство $\overset{0}{M}_F$ приводит алгебру R.

Если свойство 2 для M_F^0 не выполняется, то в $\sigma_a(R)$ найдется функционал $m_0 \overline{\in} F$ и отвечающая ему обобщенная последовательность $x_\alpha \subset M_F^0$. Рассмотрим оператор P, существующий по лемме 3.1. Для любого подпространства L из 0_F $\sigma_a(R|_{\overline{PL}}) = \varnothing$. В силу теоремы 1.1 $PM_F^0 = 0$. Это противоречит тому, что $\lim\limits_\alpha \| Px_\alpha \| > 0$. Таким образом, подпространство M_F^0 обладает свойством 2 и, очевидно, свойством 3.

Пусть идеал $m_0 \in \operatorname{int} F$. Положим $F_1 = \sigma_a(R) \setminus \operatorname{int} F$. Если P — оператор, отвечающий по лемме 3.1 идеалу и множеству F_1, то $F_1 \cap \sigma_a(R|_{\overline{\operatorname{Im} P}}) = \varnothing$, поэтому $\operatorname{Im} P \subset M_F^0$. Если $\{x_\alpha\}$ — обобщенная последовательность для идеала m_0 то $\{Px_\alpha\}$ также обобщенная последовательность для m_0 и $\{Px_\alpha\} \subset \operatorname{Im} P \subset M_F^0$. Это означает, что $\sigma_a(R|_{M_F^0}) \ni m_0$.

Последнее утверждение теоремы 3.2 доказывается индукцией по n. Пусть $\sigma_a(R) = \operatorname{int} F_1 \cup \operatorname{int} F_2$, где F_1F_2 — замкнутые подмножества $\sigma_a(R)$. Для каждой точки $m \in \overline{F_2 \setminus F_1}$ и множества $\overline{F_1 \setminus F_2}$ построим оператор P_m и окрестность u_m, отвечающие им по лемме 3.1. Пусть $u_{m_1}, \ldots, u_{m_n}$ — конечное покрытие компакта $\overline{F_2 \setminus F_1}$. Оператор P_{m_i} в силу свойства 2 аннулирует подпространство $M_{\overline{F_1 \setminus F_2}}$ и $\sigma_a(R|_{\overline{\operatorname{Im}(I - P_{m_i})}}) \cap u_i = \varnothing$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Положим $S_1 = \prod\limits_1^n (I - P_{m_i})$. Тогда $\sigma_a(R|_{\overline{\operatorname{Im} S_1}}) \cap (\overline{F_2 \setminus F_1}) = \varnothing$, т. е. оператор S_1 аннулирует подпространство $M_{\overline{F_2 \setminus F_1}}$. Кроме того, S_1 является тождественным оператором на $M_{\overline{F_2 \setminus F_1}}$, поэтому $\operatorname{Im} S_1 \subset M_{F_1}$. Аналогично оператор $S_2 (S_2 = I - S_1$ аннулирует подпространство $M_{\overline{F_1 \setminus F_2}})$ равен тождественному на $M_{\overline{F_2 \setminus F_1}}$ и $\operatorname{Im} S_2 \subset M_{F_2}$. Пусть $\sigma_a(R) = \bigcup\limits_1^n \operatorname{int} F_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Положим $F_i^1 = F_i \cup F_n$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. Рассмотрим операторы P_i', существующие по индуктивному предположению. Пусть $K_1 = \bigcup\limits_1^{n-1} F_i$, $K_2 = F_n$ и S_1, S_2 — операторы разбиения единицы, отвечающие множествам K_1, K_2. Легко видеть, что операторы P_1, задаваемые равенствами $P_i = S_1P_i'$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, $P_n = S_2$, являются разбиением операторной единицы для множества $F_1, \ldots, F_n$. Теорема 3.2 доказана.

Отметим, что из теоремы 4 [3] и теоремы 3.2 следует результат Ю. И. Любича, В. И. Мацаева и Г. М. Фельдмана об отделимости спектра неквазианалитического представления локально компактной абелевой группы [8] при условии, что представление равномерно непрерывно (но не сильно непрерывно, как было в работе [8]).

Автор приносит благодарность Ю. И. Любичу и В. И. Мацаеву за внимание к работе и обсуждение результатов.

Список литературы: 1. *Любич Ю. И.* О спектре представления топологической абелевой группы. — ДАН СССР, 1971, т. 200, № 4, с. 777—780. 2. *Любич Ю. И., Мацаев В. И.* Об операторах с отделимым спектром. — Мат. сб., 1962, т. 56 (98) : 4, с. 433—468. 3. *Ломоносов В. И. Любич Ю. И., Мацаев В. И.* Двойственность спектральных подпространств и условия отделимости спектра ограниченного линейного оператора. — ДАН СССР, 1974, т. 216, № 4. с. 737—739. 4. *Zelasko W.* Ona certain class of non-romovable ideals in Banach algebras. — Studia Math., 1972, v. 44, p. 87-92. 5. *Domar G., Lindahl L.-A.* Three spectral notions for representations of commutative Banach algebras. Uppsala (preprint), 1968. 6. *Ломоносов В. И.* Некоторые вопросы теории инвариантных подпространств. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Харьков, 1973. 120 с. 7. *Шилов Г. Е.* О нормированных кольцах с одной образующей. — Мат. сб., 1947, т. 21 (63) : 2, с. 25—37. 8. *Любич Ю. И., Мацаев В. И., Фельдман Г. М.* О представлениях с отделимым спектром. — Функцион. анализ и его приложения, 1973, т. 7, № 2, с. 52—61.

Поступила 27 декабря 1977 г.