УДК 511.6+517.56

А. В. КРЫТОВ

О ВЕЛИЧИНАХ ОТКЛОНЕНИЙ ЦЕЛЫХ КРИВЫХ С ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫМИ КОНПОНЕНТАМИ

1. Пусть $\vec{G}(z)$ — p-мерная ($p \geqslant 2$) целая кривая. Ниже мы будем пользоваться стандартными обозначениями теории целых кривых [1—4]. Пусть $\beta(\vec{a}, \vec{G})$ — величина отклонения целой кривой от p-мерного вектора $\vec{a}$ [5], A — допустимая система p-мерных векторов [4].

Известно [6], что для целых кривых конечного нижнего порядка λ множество

$$\Omega_A(\vec{G}) = \{\vec{a} \in A : \beta(\vec{a}, \vec{G}) > 0\}$$

не более чем счетно для произвольной фиксированной допустимой системы векторов A. Справедлива следующая

Теорема А [7, с. 470]. *Если p-мерная целая кривая $\vec{G}(z)$ имеет конечный нижний порядок λ, то величины ее отклонений относительно произвольной фиксированной допустимой системы векторов A удовлетворяют соотношению*

$$\sum_{\vec{a} \in A} \beta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant K(1+\lambda)(p!)^3,$$

где K — положительная абсолютная постоянная.

В предположении линейной зависимости компонент целой кривой $\vec{G}(z)$ в данной работе получено утверждение, аналогичное теореме А. В связи с этим сформулируем определение указанной выше линейной зависимости, приведенное, по существу, в работе [8].

Определение 1. *Если $\vec{G}(z)$ — p-мерная целая кривая и ω, $0 \leqslant \omega \leqslant p-2$,— максимальное число всех p-мерных линейно независимых векторов $\vec{a}$ таких, что $(\vec{G}(z) \cdot \vec{a}) \equiv 0$, будем говорить, что $\vec{G}(z)$ имеет ω-линейно зависимые компоненты.*

Из определения 1 следует, что среди компонент целой кривой $\vec{G}(z)$ найдутся $p-\omega$ линейно независимых компонент $g_{\alpha_j}(z)$

$(1 \leqslant j \leqslant p-\omega)$ *и* ω *зависимых, являющихся линейными комбинациями* $g_{\alpha_j}(z)$ $(1 \leqslant j \leqslant p-\omega)$.

Заметим, что случай $\omega = 1$ соответствует обычной линейной зависимости. Если $\omega = 0$, то $\vec{G}(z)$ имеет линейно независимые компоненты. В настоящее время известны оценки для сумм дефектов p-мерных целых кривых с ω-линейно зависимыми компонентами [8; 9].

Везде в этом параграфе будем предполагать, что если заданы p-мерная целая кривая $\vec{G}(z)$ и допустимая система векторов A, то для любого вектора $\vec{a} \in A$ выполняется соотношение $(\vec{G}(z) \times \times \vec{a}) \not\equiv 0$.

Основным результатом настоящего параграфа является

Теорема 1. *Пусть* $\vec{G}(z)$ — *p-мерная целая кривая с* ω-*линейно зависимыми компонентами нижнего порядка* $\lambda < \infty$ *и* A — *произвольная фиксированная допустимая система векторов. Тогда а) множество* $\Omega_A(\vec{G})$ *не более чем счетно; б) имеет место неравенство*

$$\sum_{\vec{a} \in A} \beta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant K(1+\lambda)(p!)^3.$$

Доказательство теоремы 1 проводится методом из работы [7]. При этом существенно используется следующая далее лемма 1. Прежде чем сформулировать ее, опишем построение системы вспомогательных функций, применяемых в ходе доказательства теоремы 1. Пусть

$$\vec{G}(z) = \{g_n(z)\}_{n=1}^{p} \tag{1}$$

— p-мерная целая кривая с ω-линейно зависимыми компонентами и

$$\{n_k, n_{k-1}, \ldots, n_0\}, \; 1 \leqslant n_j \leqslant p, \; j = 0, 1, \ldots, k, \tag{2}$$

— фиксированный набор из $k+1$ $(1 \leqslant k \leqslant p-1)$ различных натуральных чисел. Для этого набора определим (однозначно) рекуррентными формулами систему целых функций [7, с. 472]

$$g_{(\nu, n_0)}(z) = \left(\frac{g_\nu(z)}{g_{n_0}(z)}\right)' \cdot g_{n_0}^2(z) \quad (\nu \neq n_0;\; \nu = 1, 2, \ldots, p);$$

$$g_{(\nu, n_{\mu-1}, \ldots, n_0)}(z) = \left(\frac{g_{(\nu, n_{\mu-2}, \ldots, n_0)}(z)}{g_{(n_{\mu-1}, \ldots, n_0)}(z)}\right)' \cdot g^2_{(n_{\mu-1}, \ldots, n_0)}(z); \tag{3}$$

$$(1 \leqslant \mu \leqslant k;\; \nu \neq n_{\mu-1}, \ldots, n_0).$$

Справедлива следующая

Лемма 1. *Функция* $g_{(n_k, n_{k-1}, \ldots, n_0)}(z)$, *соответствующая любому набору* (2), *состоящему больше чем из* $p-\omega$ *чисел, и данной целой кривой* (1), *имеющей* ω-*линейно зависимые компоненты, тождественно равна нулю.*

Доказательство леммы 1 основано на разложении каждой функции $g_{(n_k, n_{k-1}, \ldots, n_0)}(z)$ в линейную комбинацию целых функций (3), индексы которых принадлежат набору $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-\omega}\}$, составленному из индексов линейно независимых целых функций $g_{\alpha_1}(z), g_{\alpha_2}(z), \ldots, g_{\alpha_{p-\omega}}(z)$.

2. Будем считать известным понятие Г-емкости множеств в C^n, введенное Л. И. Ронкиным [10]. Имеет место

Теорема 2. *Предположим, что* $\vec{G}(z)$ — *p-мерная целая кривая с ω-линейно зависимыми компонентами и* $\Omega_F(\vec{G}) = \{\vec{a} = (1, a_2, \ldots, a_p) : \beta(\vec{a}, \vec{G}) > 0\}$. *Тогда множество* $\Omega_{p-1}(\vec{G}) = \{(b_1, \ldots, b_{p-1}) \in C^{p-1} : (1, b_1, \ldots, b_{p-1}) \in \Omega_F(\vec{G})\}$ *имеет нулевую* Г-*емкость.*

Аналогичный результат известен для p-мерных целых кривых с линейно независимыми компонентами [11]. Доказательство теоремы 2 проводится методом из работы [11].

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. П. Петренко за руководство работой.

Список литературы: **1**. *Weyl H., Weyl J.* Meromorphic functions and analytic curves. Princeton, 1943. 531 p. **2**. *Ahlfors L.* The theory of meromorphic curves.— Acta Soc. Sci. Fenn., 1941, v. 3, No 4, p. 1—31. **3**. *Cartan H.* Sur les zeros des combinaisons lineaires de *p* fonctions holomorphes données.— Mathematica, 1933, v. 7, p. 5-33. **4**. *Гольдберг А. А.* Некоторые вопросы теории распределения значений.— В кн.: Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., Физматгиз, 1960, с. 263—300. **5**. *Петренко В. П.* О величинах отклонений целых кривых нижнего порядка $\lambda < 1$.— ДАН СССР, 1972, т. 207, № 3, с. 538—540. **6**. *Петренко В. П., Хуссайн М.* О росте целых кривых.— Изв. АН СССР. Серия мат., 1973, т. 37, № 2, с. 466—477. **7**. *Петренко В. П.* Рост целых кривых конечного нижнего порядка.— Мат. сб., 1975, т. 97, № 4, с. 469—492. **8**. *Toda N.* Sur les combinaisons exceptionnelles de fonctions holomorphes; applications aux fonctions algebroides.— Tohoku Math. J., 1970, v. 22, No 2, p. 290-319. **9**. *Toda N.* Sur quelques combinaisons lineaires exceptionnelles au sens de Nevanlinna.— Tohoku Math. J., 1971, v. 23, No 1, p. 67-95. **10**. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. М., Наука, 1971. 432 с. **11**. *Ламзина Т. Б.* Исследование множеств приближения для мероморфных функций и целых кривых. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Харьков, 1975. 145 с.

Поступила 5 июля 1976 г.