УДК 513.88

В. Н. КАЛЮЖНЫЙ

ФОРМУЛА ДЛЯ L_1-ПОЛУНОРМЫ, ОТВЕЧАЮЩЕЙ МЕРЕ НА КОМПАКТЕ ЦЕЛЫХ p-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Пусть $\boldsymbol{Q}_p$ — поле p-адических чисел, $\boldsymbol{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, $K \supset \boldsymbol{Q}_p$ — поле, полное относительно абсолютного значения, продолжающего p-адическое. Обозначим через $C(\boldsymbol{Z}_p)$ банахово пространство непрерывных на $\boldsymbol{Z}_p$ функций со значениями в K с нормой $\|f\| = \sup\{|f(z)| : z \in \boldsymbol{Z}_p\}$. Пусть $M(\boldsymbol{Z}_p)$ — пространство непрерывных линейных функционалов на $C(\boldsymbol{Z}_p)$, называемых мерами, с обычной нормой. Известно [1, 2], что система полиномов

$$\binom{z}{n} = \frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{n!}$$

образует ортонормированный базис в $C(\boldsymbol{Z}_p)$ в том смысле, что для любой непрерывной на $\boldsymbol{Z}_p$ функции f существует последовательность $(a_n) \subset K$, стремящаяся к нулю и такая, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{z}{n} \quad (z \in \boldsymbol{Z}_p); \tag{1}$$

$$\|f\| = \sup\{|a_n| : n = 0, 1, \ldots\}.$$

Всякая мера μ определяется заданием ограниченной последовательности $\mu_n = \mu\left(\binom{z}{n}\right)$, при этом $\|\mu\| = \sup\{|\mu_n| : n = 0, 1, \ldots\}$. Пусть $K\langle X\rangle$ — алгебра формальных степенных рядов $F = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ с ограниченными коэффициентами, снабженная нормой $\|F\| = \sup\{|c_n| : n = 0, 1, \ldots\}$. Известно [3], что алгебра мер $M(\boldsymbol{Z}_p)$ со сверткой в качестве умножения изометрически изоморфна алгебре $K\langle X\rangle$ при отображении $\mu \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n X^n$. В дальнейшем будем отождествлять меру μ с соответствующим ей рядом. При этом $\mu(f)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n a_n$. В пространстве $K\langle X\rangle$ действует оператор дифференцирования

$$D\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n X^n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}n\mu_n X^{n-1}.$$

Легко видеть, что $\|D^m\|\leqslant|m!|$.

В работе [4] была построена теория интегрирования на локально компактных пространствах. Полунорма на $C(\boldsymbol{Z}_p)$, отвечающая мере μ, определяется равенством

$$\|f\|_\mu=\sup\{\|g\|^{-1}|\mu(fg)|:g\in C(\boldsymbol{Z}_p),\ g\neq 0\}. \tag{2}$$

Мы пользуемся обозначением полунормы из работы [5]. Там же приведены ее эквивалентные определения. Формулу (2) можно истолковать следующим образом. В пространстве $C(\boldsymbol{Z}_p)$ рассмотрим оператор $T_f(g)=fg$. Пусть T_f^* — сопряженный оператор. Тогда $\|f\|_\mu=\|T_f^*(\mu)\|$.

Теорема 1. *Для любой* $f\in C(\boldsymbol{Z}_p)$ *выполняется равенство*

$$T_f^*=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(1+X)^n\frac{D^n}{n!}.$$

Доказательство. Проверим вначале, что $T_z^*=(1+X)D$. Легко видеть, что для $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\binom{z}{n}$ выполняется равенство

$$((1+X)D(\mu))(g)=\sum_{n=0}^{\infty}((n+1)\mu_{n+1}+n\mu_n)b_n.$$

С другой стороны, в силу равенства

$$z\binom{z}{n}=(n+1)\binom{z}{n+1}+n\binom{z}{n}$$

будем иметь $zg(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n(b_{n-1}+b_n)\binom{z}{n}$. Поэтому $(T_z^*(\mu))(g)=$ $=\mu(zg)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n n(b_{n-1}+b_n)=\sum_{n=0}^{\infty}(\mu_{n+1}(n+1)+\mu_n n)b_n=((1+$ $+X)D(\mu))(g)$. Далее последовательно будем иметь $T^*_{z\ldots(z-n)}=$ $=T^*_{(z-n)}T^*_{z\ldots(z-n+1)}=[(1+X)D-n](1+X)^nD^n=(1+X)^{n+1}D^{n+1}$, откуда следует, что

$$T^*_{\binom{z}{n}}=\frac{(1+X)^nD^n}{n!}\quad(n=0,\ 1,\ \ldots).$$

Равенство (3) получается теперь из формулы (1) по соображениям непрерывности.

Теорема 2. *Для любых $f \in C(\mathbf{Z}_p)$ и $\mu \in M(\mathbf{Z}_p)$ имеет место равенство*

$$\|f\|_\mu = \sup_{m=0,\,1,\,\dots} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{i=0}^{m} \mu_{n+i} \binom{m}{i} \binom{n+i}{m} \right|.$$

Доказательство. Имеем $(T_f^*)(\mu) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (1+X)^n \frac{D^n}{n!}\right) \times \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k X^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n \binom{n}{j} \mu_k \binom{k}{n} X^{k+j-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=i}^{i+n} a_n \mu_{n+i} \times \times \binom{n}{m-i} \binom{n+i}{n} X^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=m-n}^{m} a_n \mu_{n+i} \binom{n}{m-i} \binom{n+i}{n} \right) X^m = = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m} a_n \mu_{n+i} \binom{m}{i} \binom{n+i}{m} \right) X^m.$ Поэтому $\|(T_f^*)(\mu)\| = = \sup_{m=0,\,1,\,\dots} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m} a_n \mu_{i+n} \binom{m}{i} \binom{n+i}{m} \right|.$ Вычислим L_1-полунорму, отвечающую мере

$$\mu^{(r+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} X^n = \frac{1}{(1-X)^{r+1}} \quad (r = 0,\ 1,\ \dots).$$

Следующие леммы приведем без доказательства.

Лемма 1. *Если* $|c_{mm}| = 1 \geqslant |c_{km}|$ *для всех* $k = 0,\ 1,\ \dots,\ m$; $m = 0,\ 1,\ \dots$, *то*

$$\sup_{m=0,\,1,\,\dots} \left| \sum_{k=0}^{m} c_{km} y_k \right| = \sup_{m=0,\,1,\,\dots} |y_m|.$$

Лемма 2. *Если* $|b_{mm}| = 1 \geqslant |b_{nm}|$ *для всех* $n = m,\ m+1,\ \dots$; $m = 0,\ 1,\ \dots$, *и* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, *то*

$$\sup_{m=0,\,1,\,\dots} \left| \sum_{n=m}^{\infty} b_{nm} z_n \right| = \sup_{m=0,\,1,\,\dots} |z_m|.$$

Теорема 3. *Выполняются равенства*

$$\|f\|_{\mu^{(r+1)}} = \sup\left\{ \left| \binom{n+r}{r} a_n \right| : n = 0,\ 1,\ \dots \right\};$$

$$\|f\|_{\mu^{(r+1)}} = \sup\left\{ \left| f(z) \binom{z+r}{r} \right| : z \in \mathbf{Z}_p \right\}. \tag{4}$$

Доказательство. По теореме 2 имеем

$$\|f\|_{\mu(r+1)} = \sup_{m=0,\ 1,\ \ldots} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{i=0}^{m} \binom{n+i+r}{r} \binom{m}{i} \binom{n+i}{m} \right|.$$

Проведем вспомогательные вычисления:

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i+r}{r} \binom{m}{i} \binom{n+i}{m} = \binom{m+r}{r} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \binom{n+i+r}{m+r} =$$

$$= \binom{m+r}{r} \sum_{k=0}^{m} 2^k \binom{m}{k} \binom{n+r}{k+r} = \binom{n+r}{r} \sum_{k=0}^{m} 2^k \binom{m+r}{m-k} \binom{n}{k}.$$

С помощью лемм 1 и 2 получим $\|f\|_{\mu(r+1)} = \sup\limits_{m=0,\ 1,\ \ldots} \left| \sum\limits_{k=0}^{m} 2^k \binom{m+r}{m-k} \times \right.$

$$\left. \times \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n+r}{r} \binom{n}{k} \right| = \sup_{m=0,\ 1,\ \ldots} \left| \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a_n \binom{n+r}{r} \right| =$$

$= \sup\limits_{m=0,\ 1,\ \ldots} \left| a_m \binom{m+r}{r} \right|$. Для доказательства формулы (4) заметим, что

$$\binom{y}{r} f(y-r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{n+r}{r} \binom{y}{n+r}.$$

Поэтому $\|f\|_{\mu(r+1)} = \sup \left\{ \left| a_n \binom{n+r}{r} \right| : n = 0, \quad 1, \quad \ldots \right\} =$

$$= \sup \left\{ \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{n+r}{r} \binom{y}{n+r} \right| : y \in \mathbf{Z}_p \right\} = \sup \left\{ \left| \binom{y}{r} f(y-r) \right| : \right.$$

$$\left. : y \in \mathbf{Z}_p \right\} = \sup \left\{ \left| \binom{z+r}{r} f(z) \right| : z \in \mathbf{Z}_p \right\}.$$

В работе [4] была введена функция $N_\mu(z) = \inf \|\varphi_U\|_\mu$, где U пробегает открытые компактные окрестности точки z. Доказано [4; 5], что $\|f\|_\mu = \sup\limits_z |f(z)| N_\mu(z)$. Нетрудно показать, что $N_{\mu(r+1)}(z) = \left| \binom{z+r}{r} \right|$. Последнюю формулу интересно сравнить с выражением для плотности меры $\mu^{(r+1)}$, имеющимся в работе [6].

Список литературы: **1**. *Mahler K.* In interpolation series for continuous functions of a p-adic variable.— J. Reine Angew. Math., 1958,v. 199, p. 23-34. **2.** *Amice I.* Interpolation p-adique.— Bull. Soc. Math. France, 1964, t. 92, p. 117-180. **3.** *Put M. van der.* Difference equations over p-adic fields.— Math. Ann., 1972, v. 198, No 3, 189-203. **4.** *Monna A. F., Springer T. A.* Non-Archimedienne integration, I, II.— Indag. Math., 1963, v. 25, p. 634-642, 643-653. 5. *Rooij A. C. M. van, Schikhof W. H.* Non-archimedean analysis.— Nieuw Archc. Wisk., 1971, v. 19, p. 120-160. 6. *Barsky D.* Mesures p-adiques et element analytiques. — J. Reine Angew. Math., 1977, v. 291, p. 204-219.

Поступила 5 января 1977 г.