УДК 517.948 + 512.13

Е. П. ГОМОЗОВ

## РОСТКИ, ω-ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КООРДИНАТ В ПРООБРАЗЕ

Обозначим через $I(n, m)$ пространство ростков $C^\infty$-отображений $F:(R^n, 0) \to (R^m, 0)$, а через $\hat{I}(n, m)$ — пространство формальных рядов Тейлора в начале координат отображений из $I(n, m)$. Ростки $F, G \in I(n, m)$ называются эквивалентными, если найдется такое преобразование координат $H \in I(n, n)$, что $G = FH$. Росток $F$ называется $t$-определенным, если всякий росток $G$, имеющий такую же $t$-струю, как и $F$*, эквивалентен $F$. Согласно Мазеру [1] росток $F \in I(n, m)$ конечно определен, если он $t$-определен при некото-

* $F$ и $G$ имеют одинаковую $t$-струю, если $\| F(x) - G(x) \| = o(\| x |^t|)$,

ром $t$. В работе [1] доказано, что росток $F$ конечно определен тогда и только тогда, когда найдется такое натуральное $k < \infty$, что для любого ростка $\tau$ с нулевой $k$-струей разрешимо уравнение $\tau(x) = F'(x)\,h(x)$.

Росток $F \in I(n, m)$ называется $\omega$-определенным, если всякий другой росток $G \in I(n, m)$ такой, что его формальный ряд Тейлора $\hat{G} \in \hat{I}(n, m)$ совпадает с $\hat{F} \in I(n, m)$, эквивалентен $F$. В статье [2] доказано, что если росток функции $d(x) = \det\{F'(x)[F'(x)]^*\}$ имеет в начале координат нуль конечного порядка

$$|d(x)| \geqslant C\,\|x\|^{\alpha}\ (C > 0, \alpha > 0), \tag{1}$$

то росток $F \in I(n, m)$ $\omega$-определен. В настоящей статье мы получим более точные условия $\omega$-определенности, близкие к условиям работы Мазера.

Обозначим через $\tilde{I}(n, m)$ пространство плоских* в нуле ростков $\tau \in I(n, m)$.

**Теорема.** *Пусть для ростка $F \in I(n, m)$ уравнение*

$$\tau(x) = F'(x)\,h(x) \tag{2}$$

*разрешимо для любого $\tau \in \tilde{I}(n, m)$. Тогда росток $F$ $\omega$-определен.*

Следствие. *Если для ростка $F \in I(n, m)$ выполнено условие* (1), *то росток $F$ $\omega$-определен.*

Для доказательства сформулированной теоремы нам понадобятся некоторые определения. Обозначим через $V(\delta)$ замкнутую $\delta$-окрестность точки $x = 0$ в пространстве $R^n$. Пусть $\tau$ — росток фиксированной неотрицательной $C^\infty$-функции, плоской в точке $x = 0$. Обозначим через $I^\tau(n, m, \delta)$ пространство $C^\infty$-отображений $\varphi: V(\delta) \to R^m$, удовлетворяющих условию

$$\|\varphi\|_\nu = \max_{i \leqslant \nu}\ \max_{x \in V(\delta)} \frac{\|\varphi^{(i)}(x)\|}{\tau(x)} < \infty.$$

Пусть $I^\tau(n, m) = \operatorname{limind}_{\delta \to 0} I^\tau(n, m, \delta)$. Линейный оператор $B: I^{\tau_1}(n, m) \to I^{\tau_2}(n, m)$ называется ограниченным, если найдутся константа $\gamma$, числа $d_\nu$ и такое семейство представителей $\{B_\delta\}$ оператора $B$, что

$$\|B_\delta f\|_\nu^{(2)} \leqslant \gamma \|f\|_\nu^{(1)} + d_\nu \cdot \|f\|_\nu^{(1)},\ f \in I^{\tau_1}(n, m, \delta). \tag{3}$$

Здесь $\|\cdot\|_\nu^{(i)}$ — семейство норм в пространстве $I^{\tau_i}(n, m, \delta)$, $i = 1, 2$.

**Пример 1.** Оператор $B: I^{\tau_1}(n, m) \to I^{\tau_2}(n, m)$, определенный равенством $(B\varphi)(x) = \frac{1}{\tau(x)}\varphi(x)$, является ограниченным, если $\tau_1 = \tau^\alpha$, $\tau_2 = \tau^{\alpha-1}$, $\alpha > 1$. Оператор $H: I^{\tau_1}(n, m) \to I^{\tau_2}(n, m)$ называется малым, если для любых $\varepsilon > 0$, $\varkappa > 0$ найдутся функции

* Отображение называется плоским в точке, если оно равно нулю в этой точке вместе со всеми своими производными.

$h_\nu(z)$ и семейство представителей $\{H_\delta\}$ оператора $H$, удовлетворяющие неравенствам

$$\| H_\delta f \|_\nu^{(2)} \leqslant \varepsilon \| f \|_\nu^{(1)} + h_\nu (\| f \|_{\nu-1}^{(1)}), \; f \in I^{\tau_1}(n, m, \delta) \tag{4}$$

при условии $\| f \|_\nu^{(1)} \leqslant \varkappa$.

**Пример 2.** Пусть $F \in I(n, m)$. Оператор

$$H : I^{\tau_1}(n, n) \to I^{\tau_2}(n, m),$$

определенный равенством $(H\varphi)(x) = F(x + \varphi(x)) - F(x) - F'(x)\varphi(x)$, является малым, если $\tau_1 = \tau^\alpha$, $\tau_2 = \tau^{2\alpha-\eta}$, $\eta \neq 0$, $\alpha > 0$.

Доказательство теоремы. Пусть $F \in I(n, m)$ и пусть $G \in I(n, m)$ такой росток, что $\hat{G} = \hat{F}$. Можно считать, что $G = F + g$, где $g \in \tilde{I}(n, m)$. Имея это в виду, рассмотрим уравнение $F(x + \varphi(x)) = F(x) + g(x)$ и перепишем его в виде

$$F'(x)\varphi(x) + (H\varphi)(x) = g(x), \tag{5}$$

где $(H\varphi)(x) = F(x + \varphi(x)) - F(x) - F'(x)\varphi(x)$. Положим далее $Q_{k,\nu} = \max\limits_{\substack{j \leqslant k \\ \alpha \leqslant \nu}} \max\limits_x \left(\sqrt{\| g^{(j)}(x) \|}\right)^{(\alpha)}$ и определим

$$\tau(x) = \sqrt[3]{\sum \frac{1}{2^k Q_{k,k}} \sqrt{\| g^{(k)}(x) \|}}.$$

Тогда $\tau \in \tilde{I}(n, 1)$, $\tau(x) > 0$ при $x \neq 0$ и $g \in I^{\tau^3}(n, m)$. Пусть $e_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ — базисные векторы в $R^m$. В силу разрешимости уравнения (2) найдутся такие $h_1, h_2, \ldots, h_m \in I(n, m)$, что $\tau e_i = F' h_i$.

Пусть $\tilde{B}$ — $n \times m$-матрица со столбцами $h_1, h_2, \ldots, h_m$. Положим $Bg = \tilde{B} g / \tau$. Для доказательства резрешимости уравнения (5) достаточно доказать разрешимость уравнения $\varphi + BH\varphi = Bg$ относительно неизвестного $\varphi \in I^{\tau^2}(n, n)$. Это уравнение имеет смысл, так как $Bg, BH\varphi \in I^{\tau^2}(n, n)$. Кроме того, оператор $H : I^{\tau^2}(n, n) \to I^{\tau^{7/2}}(n, m)$ является малым, а оператор $B : I^{\tau^{7/2}}(n, m) \to I^{\tau^2}(n, n)$ — ограниченным. Достаточно, в свою очередь, доказать разрешимость уравнения

$$\varphi + B_\delta H_\delta \varphi = B_\delta g_\delta \tag{6}$$

для некоторых представителей $B_\delta$, $H_\delta$ операторов $B$, $H$ соответственно. Пусть $B_\delta$, $H_\delta$ — представители операторов $B$, $H$, удовлетворяющие соответственно неравенствам (3), (4) при некотором $\gamma$, $\varepsilon = \gamma/2$ и $\varkappa = 2 \| B_\delta g_\delta \|_\nu$. При фиксированном $\delta$ выберем числа $c_\nu$ так, чтобы $c_\nu \geqslant 2(\| B_\delta g_\delta \| + \gamma h_\nu (c_{\nu-1}) + \varepsilon d_\nu c_{\nu-1} + d_{\nu-1} h_{\nu-1}(c_{\nu-2}))$. Рассмотрим выпуклый компакт $K$ отображений $\varphi \in I^{\tau^2}(n, n)$, удовлетворяющих неравенствам $\| \varphi \|_\nu \leqslant c_\nu$. Если $\varphi \in K$, то $B_\delta g_\delta$ —

$-B_\delta H_\delta \varphi \in K$. Согласно принципу неподвижной точки [3], уравнение (6) имеет решение. Таким образом, теорема полностью доказана.

**Список литературы:** **1.** *Мазер Дж.* Устойчивость $C^\infty$-отображений.— Математика, 1970, т. 14, № 1, с. 145—175. **2.** *Белицкий Г. Р.* Ростки отображений, ω-определенные относительно данной группы.— Мат. сб., 1974, т. 94 (136), с. 452—467. **3.** *Tychonoff A. N.* Ein Fixfunktsatz.— Math. Ann, 1935, № 111, S. 221—234.

*Поступила 1 июня 1977 г.*