УДК 513.838

В. Д. ГОЛОВИН

ОБ ИНЪЕКТИВНОЙ РАЗМЕРНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ

В настоящей статье получены необходимые и достаточные условия, при которых инъективная размерность произвольного аналитического пучка не превосходит данной величины. Соответствующий результат представляет собой обобщение критерия инъективности аналитических пучков, полученного автором в работе [1]. В статье доказано также, что глобальная размерность пучка ростков голоморфных функций в пространстве $\boldsymbol{C}^n$ равна $n+1$. С другой стороны, из теоремы Гильберта о сизигиях следует, что глобальная размерность кольца ростков голоморфных функций в данной точке пространства $\boldsymbol{C}^n$ равна n. Основные результаты настоящей статьи анонсированы автором в заметке [2].

1. Инъективная размерность

Пусть $\boldsymbol{O}$ — пучок коммутативных колец с единицей на топологическом пространстве X. *Инъективной размерностью* $\boldsymbol{O}$-модуля $\boldsymbol{L}$ называется наименьшее целое положительное число n, обладающее тем свойством, что существует инъективная резольвента $0 \to \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}^0 \to \boldsymbol{L}^1 \to \cdots \to \boldsymbol{L}^n \to 0$ длины n. Иначе говоря, инъективная размерность $\boldsymbol{O}$-модуля $\boldsymbol{L}$ — это наименьшее целое число n такое, что $\mathrm{Ext}_0^k(x; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}) = 0$ при $k \geqslant n+1$ для любого $\boldsymbol{O}$-модуля $\boldsymbol{F}$. Инъективная размерность $\boldsymbol{O}$-модуля $\boldsymbol{L}$ обозначается через $\mathrm{inj.\,dim}_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{L}$ [ср. 3, с. 159]. Она считается равной бесконечности, если $\boldsymbol{L}$ не имеет инъективных резольвент конечной длины.

Лемма 1. *Свойство* $\mathrm{inj.\,dim}_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{L} \leqslant n$ *является локальным свойством, т. е. инъективная размерность $\boldsymbol{O}$-модуля $\boldsymbol{L}$ не превосходит n тогда и только тогда, когда для каждого достаточно малого открытого множества $U \subset X$ инъективная размерность $\boldsymbol{O}|U$ — модуля $\boldsymbol{L}|U$ не превосходит n.*

Доказательство. Пусть в точной последовательности $0 \to \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}^0 \to \boldsymbol{L}^1 \to \ldots \to \boldsymbol{L}^n \to 0$ $\boldsymbol{O}$-модули $\boldsymbol{L}^0, \boldsymbol{L}^1, \ldots \boldsymbol{L}^{n-1}$ инъективны. Если свойство $\mathrm{inj.\,dim}_0 \boldsymbol{L} \leqslant n$ выполняется локально, то для каждого достаточно малого открытого множества $U \subset X$ $\boldsymbol{O}|U$-модуль $\boldsymbol{L}^n|U$ инъективен. Отсюда следует, что $\boldsymbol{O}$-модуль $\boldsymbol{L}^n$ не имеет собственных существенных расширений, т. е. он инъективен [1 с. 590]. Последнее означает, что инъективная размерность $\boldsymbol{O}$-модуля $\boldsymbol{L}$ не превосходит n. Обратно, если $\mathrm{inj.\,dim}_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{L} \leqslant n$, то для произвольного открытого множества $U \subset X$ получаем инъективную резольвенту $\boldsymbol{O}|U$-модуля $\boldsymbol{L}|U$ $0 \to \boldsymbol{L}|U \to \boldsymbol{L}^0|U \to \to \ldots \to \boldsymbol{L}^n|U \to 0$ длины n. Это означает, что $\mathrm{inj.\,dim}_{\boldsymbol{O}|U} \boldsymbol{L}|U \leqslant n$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\boldsymbol{O}$ — пучок ростков голоморфных функций в области G пространства $\boldsymbol{C}^n$. Аналитический пучок $\boldsymbol{L}$ в G тогда и только тогда инъективен как $\boldsymbol{O}$-модуль, когда выполняются следующие условия: а) пучок $\boldsymbol{L}$ — вялый; б) каково бы ни было замкнутое множество $S \subset G$, для каждой точки $z \in G$ слой ${}_S\boldsymbol{L}_z$ пучка ${}_s\boldsymbol{L} : U \to \Gamma_s(U; \boldsymbol{L})$ является инъективным $\boldsymbol{O}_z$ — модулем.*

Доказательство этой леммы изложено в работе [1, с. 593 — 595].

Замечание. Пусть $\boldsymbol{O}$ — пучок ростков голоморфных функций в области G пространства $\boldsymbol{C}^n$. Пучок $\boldsymbol{B}$ ростков гиперфункций в G удовлетворяет условиям леммы 2 [4, с. 62, 107]. Следовательно, $\boldsymbol{B}$ является инъективным $\boldsymbol{O}$-модулем. С другой стороны, существует резольвента $0 \to \boldsymbol{O} \to \boldsymbol{B}^0 \to \boldsymbol{B}^1 \to \ldots \to \boldsymbol{B}^n \to 0$ [4, с. 73]. Отсюда получаем, что $\mathrm{inj.\,dim}_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{O} = n$.

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{O}$ — пучок ростков голоморфных функций в области G пространства $\boldsymbol{C}^n$. Аналитический пучок $\boldsymbol{L}$ на G тогда и только тогда обладает свойством* $\mathrm{inj.\,dim}_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{L} \leqslant k$, *когда выполняются следующие условия: а) для каждого открытого множества $U \subset G$ каноническое отображение $H^k(G; \boldsymbol{L}) \to H^k(U; \boldsymbol{L})$ сюръективно; б) для каждого когерентного пучка идеалов $\boldsymbol{I}$ в $\boldsymbol{O}$ и каждого замкнутого множества $S \subset G$ каноническое отображение $\boldsymbol{H}_S^k(\boldsymbol{L}) = \mathbf{Ext}_{\boldsymbol{O},S}^k(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{L}) \to \mathbf{Ext}_{\boldsymbol{O},S}^k(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{L})$ сюръективно.*

Доказательство. Пусть задана точная последовательность $0 \to \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}^0 \to \boldsymbol{L}^1 \to \ldots \to \boldsymbol{L}^k \to 0$, в которой $\boldsymbol{O}$-модули $\boldsymbol{L}^0, \boldsymbol{L}^1, \ldots \boldsymbol{L}^{k-1}$ инъективны. Достаточно доказать, что из условий

a и $б$ следует инъективность $\boldsymbol{O}$-модуля $\boldsymbol{L}^k$. Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc}
\Gamma(G;\ \boldsymbol{L}^{k-1}) & \to & \Gamma(G;\ \boldsymbol{L}^k) & \to & H^k(G;\ \boldsymbol{L}) & \to & 0\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Gamma(U;\ \boldsymbol{L}^{k-1}) & \to & \Gamma(U;\ \boldsymbol{L}^k) & \to & H^k(U;\ \boldsymbol{L}) & \to & 0.
\end{array}$$

Так как крайние вертикальные стрелки сюръективны, то средняя вертикальная стрелка $\Gamma(G;\ \boldsymbol{L}^k) \to \Gamma(U;\ \boldsymbol{L}^k)$ сюръективна по лемме о пяти гомоморфизмах. Следовательно, $\boldsymbol{L}^k$ — вялый пучок. Аналогично рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{O},S}(\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{L}^{k-1}) & \to & \mathbf{Hom}_{\boldsymbol{O},S}(\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{L}^k) & \to & \mathbf{Ext}^k_{\boldsymbol{O},S}(\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{L}) & \to & 0\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{O},S}(\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{L}^{k-1}) & \to & \mathbf{Hom}_{\boldsymbol{O},S}(\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{L}^k) & \to & \mathbf{Ext}^k_{\boldsymbol{O},S}(\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{L}) & \to & 0,
\end{array}$$

в которой $\boldsymbol{I}$ — когерентный пучок идеалов в $\boldsymbol{O}$, а S — замкнутое множество в G. Так как крайние вертикальные стрелки сюръективны, то средняя вертикальная стрелка $\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{O},S}(\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{L}^k) \to \mathbf{Hom}_{\boldsymbol{O},S}(\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{L}^k)$ также сюръективна. В силу изоморфизма $\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{O},S}(\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{L}^k) = \mathbf{Hom}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{I},\ {}_S\boldsymbol{L}^k)$ это означает, что при каждом $z \in G$ слой ${}_S\boldsymbol{L}^k_z$ пучка ${}_S\boldsymbol{L}^k : U \longmapsto \Gamma_S(U;\ \boldsymbol{L}^k)$ является инъективным $\boldsymbol{O}_z$-модулем. По лемме 2 $\boldsymbol{O}$-модуль $\boldsymbol{L}^k$ инъективен. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $\boldsymbol{O}$ — пучок ростков голоморфных функций в области G пространства $\boldsymbol{C}^n$. Аналитический пучок $\boldsymbol{L}$ на G тогда и только тогда обладает свойством* $\operatorname{inj.dim}_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{L} \leqslant k$, *когда* $\operatorname{Ext}^p_{\boldsymbol{O},S}(G;\ \boldsymbol{O}/\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{L}) = 0$ *при* $p \geqslant k+1$ *для каждого когерентного пучка идеалов $\boldsymbol{I}$ в $\boldsymbol{O}$ и каждого замкнутого множества $S \subset G$.*

Доказательство. Необходимость этого условия непосредственно следует из канонического изоморфизма $\operatorname{Ext}^p_{\boldsymbol{O},S}(G;\ \boldsymbol{O}/\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{L}) = \operatorname{Ext}^p_{\boldsymbol{O}}(G;\ (\boldsymbol{O}/\boldsymbol{I})_S,\ \boldsymbol{L})$. Предположим, что условие выполнено. Тогда, в частности, $H^p_S(G;\ \boldsymbol{L}) = 0$ при $p \geqslant k+1$. Следовательно выполняется условие a теоремы 1. Для произвольного открытого множества $U \subset G$ рассмотрим точную последовательность $\ldots \to \operatorname{Ext}^p_{\boldsymbol{O},S}(G; \boldsymbol{O}/\boldsymbol{I}, \boldsymbol{L}) \to \operatorname{Ext}^p_{\boldsymbol{O},S}(U; \boldsymbol{O}/\boldsymbol{I}, \boldsymbol{L}) \to \operatorname{Ext}^{p+1}_{\boldsymbol{O},S\setminus U}(G;\ \boldsymbol{O}/\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{L}) \to \ldots$. Тогда получим $\operatorname{Ext}^p_{\boldsymbol{O},S}(U;\ \boldsymbol{O}/\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{L}) = 0$ при $p \geqslant k+1$. Так как U произвольно, то $\mathbf{Ext}^p_{\boldsymbol{O},S}(\boldsymbol{O}/\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{L}) = 0$ при $p \geqslant k+1$, т. е. выполнено условие $б$ теоремы 1. Утверждение доказано.

2. Глобальная размерность

Глобальной размерностью пучка колец $\boldsymbol{O}$ называется наименьшее целое число n, обладающее тем свойством, что $\operatorname{inj.dim}_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{L} \leqslant n$ для каждого $\boldsymbol{O}$-модуля $\boldsymbol{L}$. Глобальная размерность пучка колец $\boldsymbol{O}$ обозначается через $\operatorname{gl.dim}\boldsymbol{O}$ [ср. 3, с. 145]. Она считается равной бесконечности, если существуют $\boldsymbol{O}$-модули сколь угодно большой инъективной размерности. Свойство $\operatorname{gl.dim}\boldsymbol{O} \leqslant n$ является локальным свойством: из леммы 1 следует, что глобальная размерность пучка колец $\boldsymbol{O}$ не превосходит n тогда и только тогда, когда для каждого достаточно малого открытого множества $U \subset x$ глобальная размерность пучка колец $\boldsymbol{O} \mid U$ не превосходит n.

Пусть $\boldsymbol{O}$ — пучок ростков голоморфных функций в области G пространства $\mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 1)$. Из теоремы Гильберта о сизигиях [5, с. 97] следует, что $\text{gl. dim}\, \boldsymbol{O}_z = n$ для каждой точки $z \in G$. Мы покажем (это является основным результатом настоящего параграфа), что $\text{gl. dim}\, \boldsymbol{O} = n + 1$. Доказательство основано на следующих леммах.

Лемма 3. *Пусть X — локально компактное топологическое пространство. Тогда для любого пучка абелевых групп $\boldsymbol{F}$ на X существует спектральная последовательность $E_2^{p,q} = \varprojlim^{(p)} H^q(K; \boldsymbol{F}) \Rightarrow H^{p+q}(X; \boldsymbol{F})$, где производный функтор проективного предела берется относительно упорядоченного по включению множества всех компактных подмножеств $K \subset X$.*

Доказательство. Множество $\boldsymbol{K}$ компактных подмножеств в пространстве X назовем *насыщенным*, если для каждого $K \in \boldsymbol{K}$ множеству $\boldsymbol{K}$ принадлежат все замкнутые подмножества множества K, а также некоторая окрестность множества K. Если $\boldsymbol{L}$ — вялый пучок абелевых групп на X, то проективная система $K \mapsto \Gamma(K; \boldsymbol{L})$ является «вялой» в следующем смысле: для любых насыщенных множеств $\boldsymbol{K}' \subset \boldsymbol{K}''$ компактных подмножеств в X каноническое отображение $\varprojlim_{\boldsymbol{K}''} \Gamma(K; \boldsymbol{L}) \to \varprojlim_{\boldsymbol{K}'} \Gamma(K; \boldsymbol{L})$ сюръективно. Это равносильно тому, что для любых открытых множеств $U' \subset U''$ в X отображение ограничения $\Gamma(U''; \boldsymbol{L}) \to \Gamma(U'; \boldsymbol{L})$ сюръективно. Таким образом, как нетрудно показать [ср. 6], проективная система $K \mapsto \Gamma(K; \boldsymbol{L})$ ациклична: $\varprojlim^{(p)} \Gamma(K; \boldsymbol{L}) = 0$ при $p \geqslant 1$. С другой стороны, имеет место канонический изоморфизм $\varprojlim \Gamma(K; L) = \Gamma(X; \boldsymbol{L})$. Отсюда следует утверждение леммы [см. 7, с. 50].

В качестве следствия получаем точную последовательность Милнора [ср. 8]:

Следствие. *Пусть X — локально компактное топологическое пространство, счетное в бесконечности. Тогда для любого пучка абелевых групп $\boldsymbol{F}$ на X имеет место точная последовательность $0 \to \varprojlim^{(1)} H^{n-1}(K; \boldsymbol{F}) \to H^n(X; \boldsymbol{F}) \to \varprojlim H^n(K; \boldsymbol{F}) \to 0$, где функторы проективного предела берутся относительно упорядоченного по включению множества всех компактных подмножеств $K \subset X$.*

Доказательство. При сделанных предположениях упорядоченное по включению множество всех компактных подмножеств в X содержит счетное конфинальное подмножество. Отсюда следует, что $\varprojlim^{(p)} = 0$ при $p \geqslant 2$. Поэтому в спектральной последовательности леммы 3 $E_2^{p,q} = 0$ при $p \neq 0$, 1. В таком случае, $E_r^{p,q} = 0$ при $p \neq 0$, 1 и каждом $r \geqslant 2$. Следовательно, $E_\infty^{p,q} = 0$ при $p \neq 0$, 1. Тем самым утверждение доказано.

Лемма 4. *Пусть X — локально компактное топологическое пространство, счетное в бесконечности. Для произвольного семейства $\boldsymbol{V}$ относительно компактных открытых множеств в X и произвольного пучка абелевых групп $\boldsymbol{F}$ на X положим*

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}} = \coprod_{V \in \boldsymbol{V}} \boldsymbol{F}_V.$$

Тогда проективный предел $\varprojlim H^n(K, \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}})$ относительно фильтрующегося множества всех компактных подмножеств $K \subset X$ канонически отождествим с некоторой подгруппой произведения

$$\coprod_{V \in \boldsymbol{V}} H_c^n(V; \boldsymbol{F}).$$

Семейство классов когомологий $h_V \in H_c^n(V; \boldsymbol{F})$ $(V \in \boldsymbol{V})$ тогда и только тогда принадлежит этой подгруппе, когда семейство открытых множеств $\{V \in \boldsymbol{V} : h_V \neq 0\}$ локально конечно.

Доказательство. Для произвольного компактного множества K в X имеет место канонический изоморфизм

$$H^n(K; \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}) = \coprod_{V \in \boldsymbol{V}} H^n(K; \boldsymbol{F}_V)$$

[см. 9, с. 220]. Кроме того, для произвольного открытого множества $V \in \boldsymbol{V}$ имеет место канонический изоморфизм $H^n(K; \boldsymbol{F}_V) = H_c^n(K \cap V; \boldsymbol{F})$. Из этих изоморфизмов утверждение леммы следует непосредственно.

Лемма 5. *Пусть $\boldsymbol{O}$ — когерентный пучок нетеровых коммутативных колец с единицей на паракомпактном топологическом пространстве X. Пусть $\boldsymbol{L}$-тонкий $\boldsymbol{O}$-модуль, для которого при каждом $x \in X$ слой $\boldsymbol{L}_x$ является инъективным $\boldsymbol{O}_x$-модулем. Тогда для произвольного когерентного $\boldsymbol{O}$-модуля $\boldsymbol{F}$*
$\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}) = 0$ *при* $k \geqslant 1$.

Доказательство. Воспользуемся спектральной последовательностью $E_2^{p,q} = H^p(X; \mathbf{Ext}^q_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{L})) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L})$ (см. 7, с. 114). Так как $\boldsymbol{L}$ — тонкий пучок, то пучки $\mathbf{Ext}^q_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{L})$ — тонкие. Следовательно, спектральная последовательность вырождается: $E_2^{p,q} = 0$ при $p \neq 0$. Получаем изоморфизм $\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}) = \Gamma(X; \mathbf{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}))$. С другой стороны, при сделанных предположениях для каждой точки $x \in X$ имеет место канонический изоморфизм $\mathbf{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{L})_x = \mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}_x}(\boldsymbol{F}_x, \boldsymbol{L}_x)$ (см. 7 с. 115—116). Отсюда получаем, что $\mathbf{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(\mathbf{F}, \boldsymbol{L}) = 0$ при $k \geqslant 1$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $\boldsymbol{O}$ — когерентный пучок нетеровых коммутативных колец с единицей на паракомпактном топологическом пространстве X. Пусть $0 \to \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}^0 \to \boldsymbol{L}^1 \to \ldots$ — резольвента $\boldsymbol{O}$-модуля $\boldsymbol{L}$, состоящая из тонких $\boldsymbol{O}$-модулей $\boldsymbol{L}^k$, для которых при каждом $x \in X$ слой $\boldsymbol{L}^k_x$ является инъективным $\boldsymbol{O}_x$-*

модулем. Тогда для произвольного когерентного $\boldsymbol{O}$-модуля $\boldsymbol{F}$ имеют место канонические изоморфизмы $\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}) = H^k \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}^*)$.

Доказательство. При каждом $n = 0, 1, \ldots$ пусть Z^n — ядро гомоморфизма $\boldsymbol{L}^n \to \boldsymbol{L}^{n+1}$. Получаем точную последовательность $0 \to \boldsymbol{Z}^n \to \boldsymbol{L}^n \to \boldsymbol{Z}^{n+1} \to 0$. Тем самым точна последовательность $\ldots \to \mathrm{Ext}^{k-1}_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}^n) \to \mathrm{Ext}^{k-1}_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{Z}^{n+1}) \to \to \mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{Z}^n) \to \mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}^n) \to \ldots$ При $k \geqslant 2$ отсюда получаем канонический изоморфизм $\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{Z}^n) = \mathrm{Ext}^{k-1}_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{Z}^{n+1})$. Следовательно, при $k \geqslant 1$ $\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}) = \mathrm{Ext}^1_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{Z}^{k-1})$. Из точной последовательности $0 \to \boldsymbol{Z}^{k-1} \to \boldsymbol{L}^{k-1} \to \boldsymbol{Z}^k \to 0$ получаем точную последовательность $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}^{k-1}) \to \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{O}}(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{Z}^k) \to \mathrm{Ext}^1_0(X; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{Z}^{k-1}) \to 0$.

Отсюда утверждение следует непосредственно.

Теорема 2. *Пусть $\boldsymbol{O}$ — пучок ростков голоморфных функций в области G пространства $\boldsymbol{C}^n$, причем $n \geqslant 1$. Тогда* $\mathrm{gl.\,dim}\, \boldsymbol{O} = n + 1$.

Доказательство. Докажем сначала, что $\mathrm{gl.\,dim}\, \boldsymbol{O} \geqslant n + 1$. Пусть S — произвольное непустое замкнутое множество в G, для которого открытое множество $U = G \setminus S$ не пусто. Пусть V — семейство всех относительно компактных, голоморфно полных открытых множеств в U. Предположим, что $\mathrm{gl.\,gim}\, \boldsymbol{O} \leqslant n$. Тогда, в частности, $H^{n+1}_S(G; \boldsymbol{O}_V) = 0$. Следовательно, отображение ограничения $H^n(G; \boldsymbol{O}_V) \to H^n(U, \boldsymbol{O}_V)$ сюръективно. С другой стороны, ввиду следствия из леммы 3, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H^n(G;\ \boldsymbol{O}_V) & \to & \varprojlim H^n(K;\ \boldsymbol{O}_V) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H^n(U;\ \boldsymbol{O}_V) & \to & \varprojlim H^n(K|U;\ \boldsymbol{O}_V) & \to & 0 \end{array}$$

с точными строками. Из леммы 4 непосредственно следует, что правая вертикальная стрелка не сюръективна. Поэтому левая вертикальная стрелка также не сюръективна. Получилось противоречие.

Докажем, что $\mathrm{gl.\,dim}\, \boldsymbol{O} \leqslant n + 1$. Для этого достаточно доказать, что $\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(G; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}) = 0$ при $k \geqslant n + 2$ для любых $\boldsymbol{O}$-модулей $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{L}$. Для произвольного $\boldsymbol{O}$-модуля $\boldsymbol{L}$ существует семейство $\boldsymbol{V}$ относительно компактных, голоморфно полных, открытых множеств в G такое, что сечения пучка $\boldsymbol{L}$ над множествами из $\boldsymbol{V}$ определяют эпиморфизм $\boldsymbol{O}$-модулей $\boldsymbol{O}_V \to \boldsymbol{L}$. Обозначим через $\boldsymbol{R}$ ядро этого эпиморфизма. Из точной последовательности $0 \to \boldsymbol{R} \to \to \boldsymbol{O}_V \to \boldsymbol{L} \to 0$ получаем точную последовательность $\ldots \to \to \mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(G; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{O}_V) \to \mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(G; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}) \to \mathrm{Ext}^{k+1}_{\boldsymbol{O}}(G; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{R}) \to \ldots$. Из теоремы 1 следует, что $\mathrm{gl.\,dim}\, \boldsymbol{O} < \infty$. Поэтому индукцией по k получаем, что наше утверждение справедливо, если $\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(G; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{O}_V) = 0$ при $k \geqslant n + 2$, т. е. если $\mathrm{inj.\,dim}_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{O}_V \leqslant n + 1$.

Таким образом, согласно следствию из теоремы 1 достаточно доказать, что $\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O},S}(G;\ \boldsymbol{O}/\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{O}_V)=0$ при $k\geqslant n+2$ для произвольного когерентного пучка идеалов $\boldsymbol{I}\subset\boldsymbol{O}$ и произвольного замкнутого множества $S\subset G$. Для этого воспользуемся точной последовательностью $\ldots\to\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(G;\ \boldsymbol{O}/\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{O}_V)\to\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(G\setminus S;\ \boldsymbol{O}/\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{O}_V)\to\to\mathrm{Ext}^{k+1}_{\boldsymbol{O},\boldsymbol{S}}(G;\ \boldsymbol{O}/\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{O}_V)\to\mathrm{Ext}^{k+1}_{\boldsymbol{O}}(G;\ \boldsymbol{O}/\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{O}_V)\to\ldots$ Из этой точной последовательности видно, что достаточно доказать равенство $\mathrm{Ext}^k_{\boldsymbol{O}}(U;\boldsymbol{O}/\boldsymbol{I},\boldsymbol{O}_V)=0$ при $k\geqslant n+1$ для произвольного открытого множества $U\subset G$. Пусть D^k—пучок ростков потоков двойной степени $(0,k)$ на G. Тогда $\boldsymbol{D}^k$ — тонкий пучок, для которого при каждом $z\in G$ слой $\boldsymbol{D}^k_z$ является инъективным $\boldsymbol{O}_z$-модулем [10, с. 123]. Отсюда следует, что $\boldsymbol{O}$-модуль

$$\boldsymbol{D}^k_{\boldsymbol{V}}=\coprod_{V\in\boldsymbol{V}}\boldsymbol{D}^k_{\boldsymbol{V}}=\boldsymbol{D}^k\otimes_{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{O}_V$$

является тонким пучком, для которого при каждом $z\in G$ слой $\boldsymbol{D}^k_{\boldsymbol{V},z}$ есть инъективный $\boldsymbol{O}_z$-модуль. Из резольвенты Дольбо-Гротендика $0\to\boldsymbol{O}\to\boldsymbol{D}^0\to\boldsymbol{D}^1\to\ldots\to\boldsymbol{D}^n\to0$ получаем резольвенту $0\to\boldsymbol{O}_V\to\boldsymbol{D}^0_{\boldsymbol{V}}\to\boldsymbol{D}^1_{\boldsymbol{V}}\to\ldots\to\boldsymbol{D}^n_{\boldsymbol{V}}\to0$ $\boldsymbol{O}$-модуля $\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{V}}$. По следствию из леммы 5 утверждение теоремы полностью доказано.

Список литературы: **1.** *Головин В. Д.* Критерии инъективности аналитических пучков.— Мат. заметки, 1975, т. 18. № 4, с. 589—596. **2.** *Головин В. Д.* О глобальной размерности пучка ростков голоморфных функций.— Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 2, с. 273—275. **3.** *Картан А., Эйленберг С.* Гомологическая алгебра. М., Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с. **4.** *Шапира П.* Теория гиперфункций. М., Мир, 1972. 142 с. **5.** *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных. М., Мир, 1969. 395 с. **6.** *Roos J.-E.* Sur les foncteurs dérivés de $\varprojlim$. Applications.— Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Paris, 1961, t. 252, № 24, p. 3702-3704. **7.** *Гротендик А.* О некоторых вопросах гомологической алгебры. М., Изд-во иностр. лит., 1961. 175 с. **8.** *Инасаридзе Х. Н.* Обобщение последовательности Милнора для обратных пределов.— Сообщения АН Груз. ССР, 1975, т. 79, № 1, с. 17—20. **9.** *Годеман Р.* Алгебраическая топология и теория пучков. М., Изд-во иностр. лит., 1961. 320 с. **10.** *Мальгранж Б.* Идеалы дифференцируемых функций. М., Мир, 1968. 131 с.

Поступила 1 июня 1977 г.