УДК 517.535.4

А. А. ГОЛЬДБЕРГ

О ДЕФЕКТНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПРОИЗВОДНОЙ МЕРОМОРФНОЙ ФУНЦИИ С МАКСИМАЛЬНОЙ СУММОЙ ДЕФЕКТОВ

Пусть f — трансцендентная мероморфная функция. Будем использовать стандартные обозначения неванлинновской теории [1]. Через $Q(r, f)$ будем обозначать любую величину, для которой

$Q = 0(T(r, f))$, $r \to \infty$, возможно, вне системы интервалов конечной суммарной длины в случае функций f бесконечного порядка. Предположим, что

$$\sum_{a \neq \infty} \delta(a, f) = 2. \tag{1}$$

Тогда, как показал Ульрих [2] [см. также 3, с. 47], $\delta(0, f') = 1$. Шах и Сингх [4] и Виттих [5] показали также, что из выражения (1) следует $\sum\limits_{a \neq 0, \infty} \delta(a, f') \leqslant 1/2$. Дрейсин [6, с. 88] высказал гипотезу, что для функций конечного порядка из формулы (1) следует, что $\delta(a, f') = 0$ при $a \neq 0, \infty$. Здесь будет показано, что это верно и без предположения о конечности порядка, причем можно требовать лишь, чтобы

$$\sum_{a} \delta(a, f) = 2. \tag{2}$$

В случае конечного порядка можно утверждать, что $\Delta(a, f') = 0$ при $a \neq 0, \infty$.

Эти результаты будут следовать из следующих двух теорем (в теореме 2 можно считать, что $Q(r, f) = 0(T(r, f))$ вне множества нулевой линейной плотности).

Теорема 1. *Для каждой функции f выполняется*

$$2\sum_{a} \delta(a, f) + \Big(\sum_{a \neq \infty} \delta(a, f)\Big) \sum_{a \neq 0, \infty} \delta(a, f') \leqslant 4. \tag{3}$$

Теорема 2. *Если $N_1(r, \infty, f) = Q(r, f)$, то*

$$\sum_{a \neq \infty} \delta(a, f') + \max\{\delta(a, f') : a \in \mathbf{C}\} \leqslant 2. \tag{4}$$

Обозначим через F шварцову производную от f, т. е. $F = (f'''/f') - 3(f''/f')^2/2$. Известно [7, с. 308], что все полюсы F лежат в кратных точках функции f и имеют порядок 2 (это легко проверить непосредственным подсчетом). Поэтому, учитывая лемму о логарифмической производной, имеем $T(r, F) = N(r, F) + Q(r, f) \leqslant 2N_1(r) + Q(r, f)$. Пусть $\varphi = f''/f'$. Воспользуемся тождеством $f'/f'' = (\varphi'/\varphi - \varphi/2)/F$. Тогда

$$m(r, f'/f'') \leqslant m(r, \varphi'/\varphi - \varphi/2) + T(r, F) + 0(1) \leqslant \leqslant 2N_1(r) + Q(r, f). \tag{5}$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем

$$N_1(r) \leqslant \Big(2 - \sum_{a} \delta(a, f) + \varepsilon\Big) T(r, f) + Q(r, f); \tag{6}$$

$$T(r, f') \geqslant m(r, 1/f') + O(1) \geqslant \Big(\sum_{a \neq \infty} \delta(a, f) - \varepsilon\Big) T(r, f) + Q(r, f); \tag{7}$$

$$m(r, f'/f'') \geqslant \Big(\sum_{a \neq 0, \infty} \delta(a, f') - \varepsilon\Big) T(r, f') + Q(r, f). \tag{8}$$

Неравенство (7) следует из 2.5 [1], а (8) — из леммы 2.1 [1]. Из выражений (5) — (8) следует (3). Если f имеет конечный порядок, то для любого $a \neq 0$, ∞ и некоторой последовательности $r_k \to \infty$ выполняется $m(r_k, f'/f'') \geqslant (1 + o(1)) \Delta(a, f') T(r_k, f')$, и те же рассуждения приводят к неравенству $2 \sum_a \delta(a, f) + \Delta(a, f') \sum_{a \neq \infty} \times$ $\times\, \delta(a, f) \leqslant 4$. Если выполнено условие (2), то $\Delta(a, f') = 0$. Если $N_1(r, \infty, f) = Q(r, f)$, то из (5) следует $2m(r, 1/f') + m(r, f'/f'') \leqslant$ $\leqslant 2m(r, 1/f') + 2N(r, 1/f') + Q(r, f) = 2T(r, f') + Q(r, f)$. С учетом (8) имеем $\delta(0, f') + \sum_{a \neq \infty} \delta(a, f') \leqslant 2$. Если максимум в (4) достигается при $a = a_0 \neq \infty$, то мы получим (4), применяя предыдущее неравенство к $f(z) - a_0 z$.

Замечание. Теоремы 1 и 2 остаются в силе для функций, мероморфных в единичном круге, таких, что $-\ln(1 - r) = 0(T(r, f))$ при $r \to 1$.

Список литературы: **1.** *Гольдберг А. А., Островский И. В.*, Распределение значений мероморфных функций. М., Наука, 1970. 592 с. **2.** *Ullrich E.* Ueber die Ableitung einer meromorphen Funktion.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl., 1929, Bd 27, S. 592—608. **3.** *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., Физматгиз, 1960. 320 с. **4.** *Shah S. M. Singh S. K.*, On the derivative of a meromorphic function with maximum defect.— Math. Z., 1956, Bd 65, S. 171—174. **5.** *Wittich H.* Ueber die Ableitung einer meromorphen Funktion mit maximaler Defektsumme.— Math. Z., 1958, Bd 69, S. 237—238. **6.** *Drasin D.* An introduction to potential theory and meromorphic functions.— Complex Anal. and Appl. Lect. Int. Semin. Course. Trieste, 1975, 1976, v. 1, p. 1-93. **7.** *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М.—Л., Гостехиздат, 1941. 388 с.

Поступила 18 марта 1978 г.