УДК 519.21

А. Е. ФРЫНТОВ, Г. П. ЧИСТЯКОВ

О БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ КЛАССА I_0

Пусть F, F_1, F_2 — функции распределения (ф. р,) на действительной прямой $\boldsymbol{R}$. Если $F = F_1 \ast F_2$, то ф. р. F_1 и F_2 называются компонентами ф. р. F. Если F — безгранично делимая (б. д.) ф. р. и все ее компоненты б. д., то говорят, что F является ф. р. класса I_0. Характеристическая функция (х. ф.) б. д. ф. р. F представляется формулой Леви— Хинчина

$$\varphi(t, F) = \exp\left\{i\beta t + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right\}, \qquad (1)$$

где $\beta \in \boldsymbol{R}$, $G(x)$ — неубывающая функция ограниченной вариации на оси $(-\infty, \infty)$, Ю. В. Линник поставил задачу описания класса I_0 в терминах функции G из представления (1). Он же доказал, что если ф. р. F принадлежит классу I_0 и имеет гауссову компоненту $(G(+0) - G(0) > 0)$, то $F \in L$, т. е. функция G является кусочно постоянной со скачками на множестве вида $\{\mu_{k1}\}_{k=-\infty}^{\infty} \cup \{\mu_{k2}\}_{k=-\infty}^{\infty}$, где $\mu_{k1} > 0$, $\mu_{k2} < 0$, а числа $\mu_{k+1, r}/\mu_{kr} \times \times (r = 1, 2;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — натуральные, отличные от единицы. Однако, как было показано А. А. Гольдбергом и И. В. Островским [1, с. 217], не всякая ф. р. F класса L принадлежит классу I_0. Не касаясь истории вопроса [1, с. 462], отметим, что в настоящей заметке приводится условие на убывание $G(-x) + G(+\infty) - G(x)$, $x \to +\infty$, в известном смысле близкое к окончательному, при котором ф. р. F принадлежащая классу L, принадлежит классу I_0. Имеет место

Теорема 1. *Пусть F — ф. р. класса L, если функция $G(x)$ из представления* (1) *для х. ф. ф. р. F допускает оценку* $(\exists K > 0)$

$$G(-x) + G(+\infty) - G(x) = 0(\exp(-Kx\ln x)),\ x \to +\infty, \qquad (2)$$

то $F \in I_0$.

Доказательство этой теоремы получается из доказательства теоремы И. В. Островского [1, с. 191—211] и следующей теоретико-функциональной леммы.

Лемма А. *Пусть $f(z)$ — целая функция, допускающая оценки*

$$|f(z)| \leqslant (|z|^k + 1)\exp\exp\{d\,\mathrm{Im}\,z\},\ z \in \boldsymbol{C}; \qquad (3)$$

$$|\mathrm{Re}\, f(z)| \leqslant (|z|^k + 1),\ \mathrm{Re}\, z = a\pi m/2,\ m = \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad (4)$$

$$|f(z)| \leqslant (|z|^k + 1),\ \mathrm{Re}\, z = 0, \qquad (5)$$

где $k \geqslant 2$ — натуральное число, $d > 0$, $0 < a < d^{-1}$ — постоянные. Тогда $f(z)$ — полином степени не выше k.

Доказательство леммы А. Не ограничивая общности считаем $d < 1$, $a = 1$. Обозначим через $\Pi_{R,h}$ полуполосу $\{z : 0 < x < h\pi/2,\ y < R\}$, а через $Q_{R,h}$ — прямоугольник $\{z : 0 < x < h\pi/2,\ |y| < R\}$, $z = x + iy$. Вместо $f(z)$ рассмотрим функцию $g(z) = f(z)\exp(-4iz)$. Чтобы оценить рост этой функции, докажем предварительно утверждение.

Пусть $F(z)$ — целая функция, удовлетворяющая оценкам $(M, m \geqslant 1,\ d < 1,\ L = 2[9/(1-d)] + 2)$;

$$|F(z)| \leqslant m^k \exp\exp\{d\,\mathrm{Im}\,z\},\ |\mathrm{Re}\,z| \leqslant \pi; \qquad (6)$$

$$|\mathrm{Re}\,F(z)| \leqslant m^k(1 + |z|^k)\,e^{4\,\mathrm{Im}\,z},\ \ \mathrm{Re}\,z = 0,\ \pi/2; \qquad (7)$$

$$|F(z)| \leqslant Me^{L|\mathrm{Im}\,z|},\ \mathrm{Re}\,z = 0. \qquad (8)$$

Тогда в полосе $\Pi_{\infty,1}$ справедлива оценка

$$|F(z)| \leqslant cMm^c \exp\{L|\operatorname{Im} z|\}, \tag{9}$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от k, d, L (но не от m, M).

Для функции $F(z)$ запишем формулу Шварца — Неванлинны в полуполосе $\Pi_{R+1,1}$:

$$F(z) = \int\limits_{\partial\Pi R+1,1} \operatorname{Re} F(\xi) K(\xi, z)\, d\xi + iC_R. \tag{10}$$

Функция $\omega(z) = \cos 2(z - iR - i)$ конформно отображает область $\Pi_{R+1,1}$ на полуплоскость $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ и поэтому нетрудно убедиться, что ядро $K(\xi, z)$ имеет вид $K(\xi, z) = \frac{2i}{\pi} \sin 2(\xi - iR - i)/\{\cos 2(\xi - iR - i) - \cos 2(z - iR - i)\}$. Разобьем интеграл в формуле (10) на три интеграла по прямолинейным участкам границы Γ_1, Γ_2, Γ_3, где Γ_2 — горизонтальная стенка полуполосы $\Pi_{R+1,1}$, а Γ_1 и Γ_3 — левая и правая стенки $\Pi_{\tilde{R}+1,1}$. Через $I_j(z)$, $j = 1, 2, 3$, обозначим соответствующие интегралы.

Оценим сначала $F(z) - F_1(z) = I_1(z) + I_3(z)$ в прямоугольнике $Q_{R,1}$, где $R \geqslant R_0$, а R_0 достаточно велико и за́висит только от k, d и L. В дальнейшем через c условимся обозначать некоторые положительные постоянные, зависящие только от k, d, L, не всегда одни и те же.

Функция $U(y) = \operatorname{Re} F(iy)$, $y \in \boldsymbol{R}$, аналитически продолжается на всю комплексную y-плоскость с оценкой

$$|U(y)| \leqslant cm^k \exp\exp\{d|\operatorname{Re} y|\}, \quad |\operatorname{Im} y| \leqslant \pi/2, \tag{11}$$

что следует из формулы (6). Заметим, что при $|\operatorname{Re}\xi| \leqslant 1$ и $z \in \Pi_{R,1}$ справедливы неравенства

$$|\sin 2(\xi - iR - i)| \leqslant c \exp\{2(R - \operatorname{Im}\xi)\}, \quad \operatorname{Im}\xi \leqslant R + 1; \tag{12}$$

$$|\cos 2(\xi - iR - i) - \cos 2(z - iR - i)| \geqslant c|\xi - z|. \tag{13}$$

В силу аналитичности функции $U(y)$ выполнено

$$I_1(z) = i \int\limits_{\Omega} U(y) K(iy, z)\, dz, \quad z \in \Pi_{R,1}, \tag{14}$$

где контур $\Omega = \Omega_1 = (-\infty, R+1)$ при $|\operatorname{Re} z| > \delta = e^{-R}$, а при $|\operatorname{Re} z| \leqslant \delta$, $\Omega = \Omega_2$, где Ω_2 совпадает с контуром Ω_1 деформированным в δ-окрестности точки $y_0 = \operatorname{Im} z$ в дугу $\{y : \operatorname{Im} y \geqslant 0, |y - y_0| = \delta\}$. Заметим, что при $z \in \Pi_{R,1}$, $y \in \Omega$, справедливо неравенство

$$|K(iy, z)| \leqslant c\delta^{-1} \exp\{2(R - \operatorname{Re} y)\}, \tag{15}$$

следующее из неравенств (12), (13) и выбора контура Ω.

Нам понадобятся оценки функции $U(y)$ при $|y-y_0|\leqslant\delta$. Функция $\omega(y)=1-\frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\ln\frac{1+(y-y_0)}{1-(y-y_0)}$ — гармоническая мера диаметра полукруга $D=\{y:|y-y_0|<1,\ \operatorname{Im}y>0\}$ относительно D. Очевидно, что

$$0\leqslant 1-\omega(y)\leqslant c\,|y-y_0|. \tag{16}$$

Теорема о двух константах [2, с. 296] с учетом оценок (6), (11), (16) дает нам ($0<d<a=1$, $\delta=e^{-R}$) при $|y-y_0|<\delta$, $y_0=\operatorname{Im}z$, $z\in Q_{R,1}$;

$$\ln|U(y)|\leqslant\omega(y)\{c+k\ln m+\ln(1+R^k)+4R\}+$$
$$+(1-\omega(y))\{c+k\ln m+c\exp(dR)\}\leqslant c+2k\ln m+5R. \tag{17}$$

Из соотношения (14) с помощью оценок (15) и (17) получаем $|I_1(z)|\leqslant c\int\limits_{-\infty}^{R+1}\delta^{-1}e^{2(R-y)}m^{2k}(1+|y|^k)e^{4y}dy+cm^{2k}e^{9R}\leqslant cm^{2k}e^{9R}$, $z\in Q_{R,1}$. Такую же оценку допускает и функция $I_3(z)$. Поэтому

$$|F(z)-F_1(z)|\leqslant cm^{2k}e^{9R},\quad z\in Q_{R,1}. \tag{18}$$

Заметим, что $F_1(z)=F_1(z+\pi)$ и $F_1(z)=F_1(\pi-z)$. Тогда, как следует из выражений (6), (8), (18) при $z\in Q_{R,2}$ выполнено

$$|F_1(z)|\leqslant cm^{2k}e^{9R}\exp\exp\{d\,|\operatorname{Im}z|\}; \tag{19}$$
$$|F_1(z)|\leqslant cMm^{2k}(e^{L|\operatorname{Im}z|}+e^{9R}),\ \operatorname{Re}z=0,\ \pi. \tag{20}$$

Рассмотрим теперь аналитическую в $Q_{R,2}$ функцию $\widetilde{F}_1(z)=\frac{F_1(z)\,P_1(z)}{P_2(z)(\cos Lz+\exp 9R)}=\frac{F_1(z)}{W(z)}$, где полиномы $P_j(z)$, $j=1,2$, подобраны так, что их коэффициенты при старших степенях равны, корни $P_1(z)$ совпадают с корнями функции $\cos Lz+\exp 9R$ в полосе $0<\operatorname{Re}z<\pi$, а корни $P_2(z)$ симметричны корням $P_1(z)$ относительно прямой $\operatorname{Re}z=0$. При $z\in\partial Q_{R,2}$ для функции $W(z)$ справедливы неравенства (L — четное число, большее $18/(1-d)$, $R\geqslant R_0(k,d,L)$)

$$c^{-1}(e^{L|\operatorname{Im}z|}+e^{9R})\leqslant|W(z)|\leqslant c(e^{L|\operatorname{Im}z|}+e^{9R}). \tag{21}$$

Гармоническая мера $\omega(z)$ горизонтальных стенок прямоугольника $Q_{R,2}$ относительно $Q_{R,2}$ допускает оценку $0\leqslant\omega(z)\leqslant\omega_1(z)+\omega_2(z)$, где $\omega_j(z)$, $j=1,2$, гармоническая мера горизонтальной стенки полуполосы $\{z=x+iy\colon 0<x<\pi,\ (-1)^j y>-R\}$. Функции $\omega_j(z)$, $j=1,2$, имеют вид $\omega_j(z)=\frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\ln\frac{1+(-1)^j\exp\{(-1)^j iz-R\}}{1-(-1)^j\exp\{(-1)^j iz+R\}}$, и, следовательно, $\omega(z)$ допускает оценку в $Q_{R,2}$

$$0\leqslant\omega(z)\leqslant c\exp(|\operatorname{Im}z|-R). \tag{22}$$

Теорема о двух константах, примененная к $\widetilde{F}_1(z)$ в $Q_{R,2}$ с учетом оценок (19), (20), левой части неравенства (21) и (22) дает нам при $z\in Q_{R(1-d),2}$ $\ln|\widetilde{F}_1(z)|\leqslant\{c+2k\ln m+\ln M\}+c\exp(|\operatorname{Im}z|-$

$-R)\{c+2k\ln m+c\exp(dR)\}\leqslant c+c\ln m+\ln M$. Из этой оценки и правой части неравенства (21) получаем при $z\in Q_{R(1-d),\,2}$

$$|F_1(z)|\leqslant cm^cMe^{LR(1-d)},\ \forall R\geqslant R_0. \tag{23}$$

Поскольку неравенства (18) и (23) справедливы при всех $R\geqslant R_0$, то имеет место и оценка (9).

Таким образом, предварительное утверждение доказано. Применяя его последовательно к функциям $F(z)=g(z\pm(m-1)\pi/2)$, $m=1,\ 2,\ \ldots$, получаем, что $|g(z)|\leqslant c\exp\{c|z|\ln|z|\}$, $|z|\geqslant 1$, т. е. функция $g(z)$, а следовательно и $f(z)$, является целой функцией не выше первого порядка роста. Из ограниченности $f(z)$ при $\operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Im}z=0$ полиномом степени k и теоремы Фрагмена — Линделефа [2, с. 313] легко следует, что $f(z)$ — полином степени не выше k. Лемма A доказана.

Замечание 1. Лемма А сохраняет силу, если условие (3) заменить более слабым, а именно, оценка (3) справедлива только при $|\operatorname{Im}z|=R_k$, $R_k\uparrow\infty$.

Не приводя доказательства теоремы 1, мы укажем на те изменения, которые необходимо внести в доказательство теоремы И. В. Островского [1, с. 191—211], чтобы получить теорему 1. При этом мы полностью сохраним все обозначения и определения, приведенные в работе [1, с. 191—211]. Лемма 5.3.1 (с. 195) в нашем случае выглядит так:

Лемма 5.3.1′. *Справедлива оценка* $g(z)=0(|z|^3\exp\exp(\rho|\operatorname{Re}z|)$, $z\to\infty$, $\forall\rho>1/k$.

Доказательство следует из леммы 5.2.6, так как ее условия, как нетрудно проверить, выполнены с $A(s)=\exp\exp(\rho s)$, $B(s)=N(s^2+1)$, $N>0$ — постоянная.

Вместо леммы 5.3.2 будем пользоваться несколько более общей.

Лемма 5.3.2′. *Справедливы соотношения* $0\leqslant u(x,\ 0)-u(x,\ 2\pi n\mu_{sr}^{-1})\leqslant 2\lambda_{s-1,\,r}\left(\sin\dfrac{\pi n\mu_{s-1,\,r}}{\mu_{s,\,r}}\right)^2 e^{\mu_{s-1,\,r}x}+c\left(\dfrac{1+n^2}{\mu_{sr}^2}\right)e^{\mu_{s-2,\,r}x}$, $\quad s=0,\ \pm1,\ \ldots$, *где* $n\geqslant 1$ — *натуральное число;* c — *постоянная, зависящая лишь от ф. р.* F, *причем правая часть неравенства при* $r=1$ *выполняется для* $x\geqslant 0$, *а при* $r=2$ — *для* $x\leqslant 0$.

Доказательство ее почти не отличается от доказательства соответствующей леммы [1, с. 196].

Далее дословно повторяем рассуждения на с. 197—200 до леммы 5.3.6, заменяя лишь во встречающихся оценках $\exp(N(\operatorname{Re}w)^2)$ на $\exp\exp(\rho|\operatorname{Re}w|)$, $w=z,\ x$. Такую же замену будем делать и в дальнейших рассуждениях.

Вместо леммы 5.3.6 используем следующее утверждение.

Лемма 5.3.6′. *Пусть* μ_{qr}, $r=1,\ 2$, *выбраны так, что* $|\mu_{qr}|\geqslant 16\rho$. *Тогда функция* $\varkappa_{qr}(x)$, $r=1,\ 2$, *является полиномом степени не выше* 5.

Утверждение этой леммы следует из леммы A, примененной к функциям $\varkappa_{qr}((-1)^{r-1}iz)$, $r=1,\ 2$, $(a=4/\mu_{qr},\ d=\rho,\ k=5)$.

Действительно, оценки (3) и (4) следуют из (5.3.29) и (5.3.30) [1, с. 200], измененных применительно к нашему случаю. Справедливость оценки (5) следует из леммы 5.3.2′.

Дальнейшие рассуждения на с. 201—204 будем повторять при условии $q \geqslant \tilde{q}$, где $\tilde{q}$ — минимальное из целых чисел, для которых $|\mu_{qr}| \geqslant 16$, $r = 1, 2$. Лемма 5.3.10 в нашем случае верна для всех $q \geqslant \tilde{q}$. Доказательство леммы получается, если изменить рассуждения на с. 205 работы [1] следующим образом:

Из леммы 5.3.2′, соотношений (5.3.40) и (5.3.41) вытекает, что при действительных $x > 0$

$$|H_{q1}(x, 2\pi n \mu_{q+1,1}^{-1})| \leqslant cn^2 (|x|^7 + 1) e^{\mu_{q1} x}, \qquad (5.3.43),$$
$$|H_{q1}(x, 2\pi n \mu_{m1}^{-1})| \leqslant cn^2 e^{\mu_{m-1,1} x}, \; m = q+1, \; q+2, \; \ldots,$$

где n — натуральное число; $c > 0$ — постоянная. В силу выражений (5.3.39) и (5.3.43) мы можем к функции $H_{q1}(x, 2\pi\mu_{m1}^{-1})$, $m = q+1, q+2, \ldots$, применить лемму А.

Завершим доказательство теоремы 1 следующим образом. Пользуясь представлением для функции $g(z)$, доказанным в лемме (5.3.10), повторим рассуждения на с. 200—211 работы [1] для произвольного q, что, как нетрудно видеть, сделать можно.

Замечание 2. Условие (2) эквивалентно следующему: ($\varphi(t, F)$ — х. ф. ф. р. F, $t \in C$)
$$\varlimsup_{|t| \to \infty} \frac{\ln \ln |\ln \varphi(t, F)|}{|t|} < \infty. \qquad (24)$$

Если вместо леммы А в доказательстве теоремы 1 воспользоваться замечанием 1, то нетрудно убедиться, что утверждение теоремы 1 сохранит силу, если в условии (24) верхний предел заменить нижним.

Замечание 3. Заметим, что все теоремы, опирающиеся на теорему И. В. Островского [1, с. 191] о достаточных условиях принадлежности ф. р. классу I_0, остаются в силе при замене условий типа (5.3.1) [1, с. 191] условием типа (2).

Замечание 4. С помощью метода, которым мы пользовались при доказательстве леммы А, можно получить следующее

Утверждение. *Пусть $f(z)$ — аналитическая в угле $0 < \arg z < \alpha$ и непрерывная в его замыкании функция, допускающая оценки:*

a) $|f(z)| \leqslant (|z|^k + 1) \exp |z|^\rho, \quad \rho < \frac{\pi}{2\alpha}, \; 0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha;$

b) $|f(z)| \leqslant (|z|^k + 1), \quad \arg z = 0;$

c) $|\operatorname{Re} f(z)| \leqslant (|z|^k + 1), \quad \arg z = \alpha.$

Тогда в угле $0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha$ справедливо неравенство $|f(z)| \leqslant c(|z|^L + 1)$, $L = L(\alpha, k)$.

Авторы выражают глубокую благодарность И. В. Островскому за ценные советы и замечания.

Список литературы: 1. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов. М., Наука, 1972. 480 с. 2. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. М., Наука, 1965. 424 с.

Поступила 17 марта 1978 г.