УДК 517.4

А. Л. ФИГОТИН

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРИ БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ НЕКОТОРЫХ ВИНЕРОВСКИХ ИНТЕГРАЛОВ. I

Пусть $q(x)$ $(x \in R^d)$ — случайное метрически транзитивное поле [1] и $M\{\cdot\}$ — соответствующее математическое ожидание (м. о.). Пусть $x(\tau)$ $(\tau \geqslant 0)$ — винеровский процесс в R^d с условием $x(0) = x$, а $E_x\{\cdot\}$ — м. о. по этому процессу. В настоящей работе рассматривается асимптотическое поведение при больших временах выражений вида

$$K(t) = E_x M \{\exp [-\int\limits_0^t q(x(\tau))\, d\tau]\}. \tag{1}$$

Случай, когда $q(x)$ имеет вид

$$q(x) = \sum_j v(x - x_j), \tag{2}$$

где точки x_j распределены в R^d согласно закону Пуассона с концентрацией $c \geqslant 0$ и $v(x) = 0$ $(|x|^{-d-}$ $(|x| \to \infty)$ был рассмотрен в работе [2]. Ответ таков:

$$\ln K(t) \sim -t^{d/d+2} K(d,\ c),\ t \to \infty. \tag{3}$$

В настоящей работе асимптотика $K(t)$ изучена для $q(x)$ имеющих вид

$$q(x) = \int\limits_{R^d} v(x - y)\, m(dy), \tag{4}$$

где m — случайная мера, принимающая независимые значения в непересекающихся областях и имеющая вероятностные распределения инвариантные относительно сдвигов в R^d, а $v(x)$ — неотрицательная суммируемая функция и $v(x) = 0(|x|^{-d-2})$, $|x| \to \infty$.

Получение асимптотики $K(t)$ при больших временах состоит в доказательстве оценок сверху и снизу для $\ln K(t)$.

Пусть M — множество положительных мер на R^d, а B — борелевская σ-алгебра на R^d. Рассмотрим вероятностное пространство $(M,\ \sum,\ P)$, удовлетворяющее условиям: $B_1 : \sum$ — σ — алгебра, порожденная открытыми множествами в M относительно слабой топологии; B_2: для любого ограниченного A из B справедливо: $m(A)$ — случайная величина на $(M,\ \sum,\ P)$, $M\{m(A)\} < \infty$, где $M\{\cdot\} = \int\limits_M \{\cdot\}\, dP$, $\operatorname{vraiinf}\{m(A)\} > 0$ $(\operatorname{mes} A > 0)$; B_3: если A_i $(1 \leqslant i < \infty)$ — непересекающиеся множества из B, то $m(A_i)$ $(1 \leqslant i < \infty)$ — независимые случайные величины; B_4: $(M,\ \sigma,\ P)$ — инвариантно относительно группы сдвигов T_x $(x \in R^d)$, т. е. $T_x \sum = \sum P T_x = P$, где $T_x m(A) = m(A + x)$ $(x \in R^d,\ A \in B)$, или B_4': $(M,$

σ, P) — инвариантно относительно группы T_x ($x \in Z^d$), $P\{m(R^d \setminus Z^d) = 0\} = 1$.

Отметим, что (M, σ, P), удовлетворяющее $B_1 - B_4$, можно задавать с помощью функции распределения $F_V(m)$ ($V > 0$) случайных величин $m(A)$ ($\operatorname{mes} A = V$). Так, пуассоновским случайным мерам с параметром c отвечает

$$F_V(m) = e^{-cV} \sum_{0 \leqslant k < m} \frac{(cV)^k}{k!} \; (m \geqslant 0). \tag{5}$$

Другим примером являются меры, для которых

$$\frac{dF_V}{dm} = c^V \Gamma^{-1}(V)\, m^{V-1} e^{-mc} \;\; (m \geqslant 0), \tag{6}$$

где c — положительный параметр [см. 6]. $K(t)$ можно записать в виде $E_{x,\,t} M\{\exp[-\int\limits_0^t q(x)\,\mu(dx)]\}$; $\mu(A) = t^{-1} \operatorname{mes}\{s : 0 \leqslant s \leqslant t, x(s) \in A\}$.

Заметим, что в силу B_4 выражение (1) не зависит от x и может быть записано в виде

$$K(t) = E_{0,\,t}\{\exp[-\Phi(t\mu)]\};$$

$$\Phi(t\mu) = \int\limits_{R^d} f\Big(t \int\limits_{R^d} v(x-y)\,\mu(dx)\Big)\, dy; \tag{7}$$

$$f(t) = -\ln M\{\exp[-tm(c)]\}; \tag{8}$$

c — единичный куб в R^d. Например, для мер вида (5) и (6) $f(t)$ равно соответственно $c(1-e^{-t})$, $\ln(1+tc^{-1})$. Функция $f(t)$ обладает свойствами: 1°. $f(t) \geqslant 0$, $f(0) = 0$. 2°. f — выпуклая вверх, монотонно возрастающая. 3°. $\lim\limits_{t \to +0} f(t)/t = M\{m(c)\}$, $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)/t = 0$. 4°. $f(a+b) = f(a) + f(b)$ (a, $b \geqslant 0$).

Кроме того, будем предполагать, что $f(t)$ удовлетворяет условию 5°. $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{f(ct)}{f(t)} = \beta(c)$ ($c \geqslant 0$). Функция $\beta(c)$ из 5°, очевидно, неотрицательна, выпукла вверх и $\beta(0) = 0$. Для случаев (5) и (6) $\beta(c) = 1$ при $c > 0$. Имеет место следующая элементарная

Лемма 1. *Уравнение $\eta^{d/2} f(t\eta^{-d/2}) = t/\eta$ имеет решение, удовлетворяющее условиям:* 1) $\eta(t)$, $t\eta^{-1}(t)$, $t\eta^{-d/2}(t)$ *монотонно стремятся к* $+\infty$ *при* $t \to \infty$; 2) $\lim\limits_{t \to \infty} t\eta^{-(d+2)/2} = \sup\limits_{t \geqslant 0} f(t)$. Отметим здесь, что в случаях (5) и (6) $t/\eta(t)$ равно соответственно $t^{d/d+2} c^{2/d+2}(1+0(1))$, $t^{d/d+2}\left(\frac{2}{d+2}\ln t\right)^{2/d+2}(1+0(1))$, $t \to \infty$. Пусть F — класс неотрицательных суммируемых функций φ из $C_0^\infty(R^d)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия $B_1 - B_3$ и либо B_4, либо B_4'. Тогда* $\lim\limits_{t \to \infty} \eta(t)\, t^{-1} \ln K(t) = -\inf\limits_{\varphi \in F}\{I(\varphi) + \int\limits_{R^d} \beta(a\varphi(x))\, dx\}$, *где*

$$I(\varphi) = \frac{1}{8} \int\limits_{R^d} |\nabla\varphi|^2/\varphi(x)\, dx, \;\; a = \|v\|_1.$$

В силу масштабных свойств винеровского процесса имеет место следующее соотношение, справедливое при любом $\lambda > 0$:

$$E_{0,\, t}\{\exp[-\Phi(t\mu)]\} = E_{0,\, t/\lambda}\{\exp[-\Phi_\lambda(t\mu)]\}, \tag{10}$$

где $\Phi_\lambda(t\mu) = \mu^{d/2}\int\limits_{R^d} f\left(t\lambda^{-d/2}\int\limits_{R^d} v_\lambda(x-y)\,\mu(dx)\right) dy$, а $v_\lambda(x) = \lambda^{d/2}\, v(\lambda^{1/2}x)$.

Оценка снизу. Согласно работе [4] $\ln K(t) \geqslant -\ln \|\sqrt{\varphi}\|_1 \times \|\sqrt{\varphi}\|_\infty - tI(\varphi) + \ln M\left\{\exp\left[\int\limits_{R^d} q(x)\,\varphi(x)\,dx\right]\right\}$. Из этого неравенства и выражения (10) получим, что $\ln K(t) \geqslant -\ln\|\sqrt{\varphi}\|_1 \times \|\sqrt{\varphi}\|_\infty - t/\lambda\left[I(\varphi) + \frac{\lambda}{t}\Phi_\lambda(t\varphi)\right]$. Положив здесь $\lambda = \eta(t)$ и разделив на $t\eta^{-1}(t)$, получим

$$\varliminf_{t\to\infty} \eta(t)\, t^{-1} \ln K(t) \geqslant \inf_{\varphi\in F}\{I(\varphi) + \varlimsup_{t\to\infty}\eta(t)\,t^{-1}\,\Phi_{\eta(t)}(\varphi)\}. \tag{11}$$

Предел, фигурирующий справа после замены $u = t\eta^{-d/2}(t)$ с учетом (9), примет вид

$$\int\limits_{R^d} \beta(a\varphi(x))\,dx. \tag{12}$$

Из формул (11) и (12) получаем оценку снизу $\varliminf_{t\to\infty}\eta(t)\,t^{-1}\ln K(t) \geqslant -\inf\limits_{\varphi\in F}\{I(\varphi) + \int\limits_{R^d}\beta(a\varphi(x))\,dx\}$.

Оценки сверху. Нетрудно видеть, что не ограничивая общности, можно считать, $v(x)/\|v\|_1 \in F$. Так же, как и в работе [2], $E_{0,\, t/\eta}\{\exp[-\Phi_\eta(t\mu)]$ допускает оценку сверху через $E^{(N)}_{0,\, t/\eta}\{\exp \times [-\Phi^{(N)}_{n,}\ (t\mu)]\}$, где $E^{(N)}_{0,\, t}\{\cdot\}$ — м. о. на M_1, определяемое винеровским процессом на торе $T_N = \{x\in R^d : |x_i| \leqslant N,\ 1\leqslant i\leqslant d\}$.

Вводя переменную $u = t\eta^{-1}(t)$, функционал $\psi_k(\varphi)$ $\psi_k(\varphi) = \int\limits_{T_N} f(t\eta^{-d/2}(t)\,\varphi(x))/f(t\eta^{-d/2}(t))\,dx$. Пользуясь леммой 1 и рассуждениями, приведшими к выражению (12), получим, что для любого семейства функций $\varphi_k \in F$ такого, $\|\varphi_k - \varphi\|_1 \to 0$, если $u\to\infty$ справедливо

$$\varliminf_{u\to\infty}\psi_k(\varphi_k) \geqslant \int\limits_{T_N}\beta(a\varphi(x))\,dx. \tag{13}$$

Из свойств $\beta(x)$ следует, что правая часть формулы (13) — полунепрерывный снизу относительно $\|\cdot\|_1$ топологии функционал на F_N.

Из замечаний к теореме 5.1 и леммы 5.1 [5], условия которых выполнены в силу выражения (15) и леммы 1, получим $\varlimsup_{t\to\infty}\eta(t)\,t^{-1}\ln E^{(N)}_{0,\, t/\eta}\{\exp[-\Phi^{(N)}_\eta(t\mu)]\} \leqslant -\inf\limits_{\varphi\in F_N}\{I(\varphi) + \int\limits_{T_N}\beta(a\varphi(x))\,dx\}$, откуда $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, \eta(t)\, t^{-1} \ln E_{0,\ t/\eta} \{\exp[-\Phi_\eta(t\mu)]\} \leqslant$

$$\leqslant -\inf_{\varphi\in F_N} \left\{ I(\varphi) + \int_{T_N} \beta(a\varphi(x))\, dx \right\}. \qquad (14)$$

Повторяя почти дословно соответствующие рассуждения из работы [2], убеждаемся, что выражение (14) влечет за собой при $N \to \infty$ соотношение $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, \eta(t)\, t^{-1} \ln K(t) \leqslant -\inf\limits_{\varphi\in F} \left\{ I(\varphi) + \int\limits_{T} \beta(a\varphi(x)) dx \right\}$. Теорема 1 доказана.

В случаях (5) и (6) асимптотики $\ln K(t)$ при $t\to\infty$ равны соответственно $-t^{d/d+2} c^{2/d+2} \left(\frac{d+2}{2}\right) \left(\frac{2\gamma_d}{d}\right)^{d/d+2}$, $-t^{d/d+2} \ln^{2/d+2} t \times \left(\frac{d+2}{2}\right)^{d/d+2} \left(\frac{2\gamma_d}{d}\right)^{d/d+2}$, где γ_d — наименьшее собственное значение задачи Дирихле в d-мерном единичном шаре. При получении последних формул было использовано значение $\inf\{I(\varphi) + \mathrm{mes} \times \{\varphi > 0\}\}$, которое было вычислено в работах [2; 3].

В заключение автор выражает глубокую благодарность Л. А. Пастуру и Д. Х. Хаджиеву за постоянный интерес к работе и полезные обсуждения.

Список литературы: 1. *Д. Дуб.* Вероятностные процессы. М., ИЛ, 1956. 463 с. 2. *Donsker M. D., Varadhan S. R. S.* Asymptotic for Wiener Sausage. Comm. on Pure and Appl. Math. 1975, v. 28, p. 525-563. 3. *Пастур Л. А.* О распределении собственных значений уравнения Шредингера со случайным потенциалом. Мат. физика и функцион. анализ (Сб. трудов ФТИНТ АН УССР). 1974, вып. V, с. 141—143. 4. *Пастур Л. А.* Об асимптотическом поведении при больших временах некоторых винеровских интегралов. — Теорет. и мат. физика, 1977, т. 32, с. 88—95. 5. *Donsker M. D., Varadhan S. R. S.* Asymptotic evolution of certain Marcov Process expoctation for large time. II.— Comm. on Pure and Appl. Math., 1975, v. 28, p. 279-301. 6. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., Мир, 1967. 388 с.

Поступила 1 апреля 1977 г.