УДК 513.88

В. Э. ЛЯНЦЕ, Х. Б. МАЙОРГА

К ТЕОРИИ ОДНОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА. I.

0. Пусть $D = C_0^\infty(\boldsymbol{R}^3)$, D'-пространство распределений, сопряженное с D, Δ-оператор Лапласа $D' \to D'$. Таким образом, $\forall f \in D'$, $\forall \varphi \in D$ $(\Delta f | \varphi) = (f | \Delta\varphi)$, где $(f|\varphi)$ обозначает значение функционала f на основной функции $\overline{\varphi}$, причем $\overline{\varphi}(x) \overset{def}{=} \overline{\varphi(x)}$, $x \in \boldsymbol{R}^3$. Это определение Δf эквивалентно следующему. Пусть $\hat{f} \overset{def}{=} \Phi f$ есть Фурье — образ распределения f, причем $\forall \varphi \in D\, \hat{\varphi}(\xi) = \Phi\varphi(\xi) \overset{def}{=}$ $\overset{def}{=} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{R^3} \varphi(x) e^{-ix\xi} dx$, $\xi \in \boldsymbol{R}^3$. Тогда $\widehat{\Delta f}(\xi) = -\xi^2 \hat{f}(\xi)$, т.е., $\widehat{\Delta f}$ есть результат умножения $\hat{f}$ на мультипликатор $-\xi^2$, где $\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$.

Обозначим через H^s соболевское пространство порядка s: $\forall s \in \boldsymbol{R}$ $H^s = H^s(\boldsymbol{R}^3) \overset{def}{=} \{f \in L_2(\boldsymbol{R}^3) : \int\limits_{R^3} (1+\xi^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty\}$; $\forall f, \ g \in H^s$ $(f|g) \overset{def}{=} \int\limits_{R^3} (1+\xi^2)^s \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi$ **(0. 1)**. Пусть S есть естественное сужение оператора $-\Delta$ на $H \overset{def}{=} H^0 = L_2(\boldsymbol{R}^3)$, так что $D(S) \overset{def}{=} \{f \in H : \Delta f \in H\}$ и $Sf = -\Delta f$ при $f \in D(S)$. Ясно, что $D(S) = H^2$, что S есть самосопряженный оператор $H \to H$ и что скалярное произведение[1] $(\cdot \mid \cdot)_{D[S]}$ эквивалентно $(\cdot \mid \cdot)_{H^2}$.

Из элементарных теорем о порядке гладкости и порядке убывания преобразования Фурье легко вывести следующее утверждение.

0.1. ***Лемма.*** *Если $f \in H^2$, то f непрерывна на $\boldsymbol{R}^3$, $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Распределение Дирака δ $(\forall \varphi \in D\delta(\varphi) = \varphi(0)$ (непрерывно относительно $\|\cdot\|_{H^2}$, (а поэтому также относительно $\|\cdot\|_{D[S]}$).*

Отметим, что для $\boldsymbol{R}^n$ с $n > 3$ аналогичная лемма места не имеет.

Пусть $D(S_0) \overset{def}{=} \{f \in D(S) : f(0) = 0\}$ и $S_0 \subset S$. Из леммы 0.1 следует, что S_0 есть плотно заданный замкнутый симметрический оператор $H \to H$ с индексом дефекта (1.1). В [1] было объяснено как самосопряженные расширения оператора S_0 связаны с т е о р и е й т о ч е ч н о г о в з а и м о д е й с т в и я[2].

Здесь мы дополним описание самосопряженных расширений оператора S_0, указанное в [1], описывая эти расширения в терминах краевых условий, как в «импульсном» ξ-представлении, так и в «координатном» x — представлении[3]. Кроме того, для каждого такого самосопряженного (и даже квазисамосопряженного) расширения мы явно построим оператор, диагонализирующий это расширение, т. е. построим соответствующие формулы обращения [4] (и соответствующую спектральную плотность).

1. Сначала опишем оператор $S_1 \overset{def}{=} S_0^*$. Отметим, что $S_0 \subset S \subset S_1$,

1.1. **Теорема.** *Пусть*

$$\pi_0 \overset{def}{=} (4\pi\sqrt{2})^{1/2} \quad \textbf{(1.0)}; \quad e_0(x) \overset{def}{=} \frac{\pi_0}{4\pi\, x} \sin\frac{x}{\sqrt{2}} \exp\frac{-|x|}{\sqrt{2}}, x \in \boldsymbol{R}^3. \qquad \textbf{(1.1)}$$

Тогда $e_0 \in H^2 = D(S)$; $\|e_0\|_{D[S]} = 1$ и $D(S) = D(S_0) \oplus Ce_0$. **(1.2)**

Кроме того, $Se_0(x) = \dfrac{\pi_0}{4\pi\, |x|} \cos\dfrac{|x|}{\sqrt{2}} \exp\dfrac{-|x|}{\sqrt{2}}$, $x \in \boldsymbol{R}^3$, **(1.3)** $Se_0 \in D(S_1)$.

$\|Se_0\|_{D[S_1]} = 1$ и $D(S_1) = D(S) \oplus CSe_0$. **(1.4)**

---

[1] Пусть L есть линейный оператор $H \to H$. Через $D[L]$ обозначаем область определения $D(L)$ оператора L, наделенную скалярным произведением его графика: $(f \mid g)_{D[L]} \overset{def}{=} (f \mid g) + (Lf \mid Lg)$, если $f, g \in D(L)$.

[2] См. также [2—5], в недавней работе [6] описание самосопряженных расширений оператора S_0 получено методами нестандартного анализа.

[3] Отметим, что запись краевых условий в x-представлении, приводимая нами ниже, в неявном виде содержится в работах [7, 8], а также в явном виде в — [9, 10].

[4] Эти формулы обращения можно рассматривать как я в н ы е формулы обращения для «возмущенного» (специальным способом) преобразования Фурье.

Прямые разложения (1.2) и (1.4) являются $(\cdot|\cdot)_{D[S_1]}$-ортогональными. Наконец, $S_1Se_0 = -e_0$ **(1.5).**

Для доказательства теоремы 1.1 мы воспользуемся одним наблюдением, сделанным в [11]. Пусть H-абстрактное гильбертово пространство, $C(H)$ — класс линейных плотно заданных замкнутых операторов $H \to H$, L_0, $L \in C(H)$, $L_0 \subset L$, $M \overset{def}{=} L_0^*$, $M_0 \overset{def}{=} L^*$, так что M_0, $M \in C(H)$ и $M_0 \subset M$. Рассмотрим прямые разложения $D(L) = D(L_0) \oplus U$, $D(M) = D(M_0) \oplus V$, ортогональные относительно, соответственно $(\cdot|\cdot)_{D[L]}$ и $(\cdot|\cdot)_{D[M]}$.

1.2. Утверждение *Сужение L на U является унитарным отображением U на V, относительно $(\cdot|\cdot)_{D[L]}$ и $(\cdot|\cdot)_{D[M]}$. Обратным к нему является сужение $-M$ на V. В частности. $D(L) = D(L_0) \oplus MV$ и $\forall v \in V$: $LMv = -v$.*

Доказательство теоремы 1.1. Применим 1.2. к $L = S_1$ и $L_0 = S$. В этом случае, $M = S$, $M_0 = S_0$, а $V = D(S) \ominus D(S_0)$. Однако[1] $D(S_0) = Z(\delta)$, где δ — функционал Дирака на $D(S) = H^2$. Поэтому $V = R(\delta^*)$, причем $\delta^*: C \to D(S)$. Таким образом, $D(S_1) = D(S) \oplus SR(\delta^*)$, где δ^* удовлетворяет тождеству: $\forall f \in D(S)$, $\forall c \in C\ (\delta^* c|f)_{D[S]} = \overline{c f(0)}$. Полагая $e \overset{def}{=} \delta^* 1$ приходим к $(\cdot|\cdot)_{D[S_1]}$ ортогональному разложению $D(S_1) = D(S) \oplus CSe$ и к соотношению $\forall f \in H^2$ $(f|e)_{D[S]} = f(0)$. **(1.6)**

Учитывая, что $f(0) = (2\pi)^{-3/2} \int_{R^3} \hat{f}(\xi)\, d\xi$ из (1.6) получаем следующие формулы для Фурье-образов: $\hat{e}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{1+\xi^4}$; $\hat{Se}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \times \times \frac{\xi^2}{1+\xi^4}$ **(1.7)** Выполнив обратное преобразование Фурье, находим, что $e = \pi_0^{-1} e_0$, $Se = \pi_0^{-1} Se_0$, где π_0, e_0 и Se_0 определяются посредством (1.0), (1.1) и (1.3). Действительно, пусть $E_\zeta(\xi) \overset{def}{=} -(2\pi)^{-3/2} (\xi^2 - \zeta)^{-1}$, так что $(\Delta + \zeta) E_\zeta = \delta$. Тогда (см. напр. [12]) $E_{k^2}(x) = -(4\pi|x|)^{-1} \exp(\pm ik|x|)$, причем знак перед i следует выбирать так, чтобы (при данном $k \in C$) $E_{k^2} \in H$. В частности, $E_{\pm i}(x) = -(4\pi|x|)^{-1} \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \mp i)|x|\right]$. Наши формулы для e_0 и Se_0 вытекают из того, что $e = (2i)^{-1} [\hat{E}_{-i} - E_{+i}]$; $\hat{Se} = -2^{-1} [\hat{E}_{-i} + E_{+i}]$.

Из равенства $LMv = -v$, отмеченного в утверждении 1.2, вытекает формула (1.5). Для вывода ортогонального разложения (1.2) утверждение 1.2 следует применить к паре операторов S_0, S.

Подставим в (1.6) e вместо f. Мы получим $\|e\|^2_{D[S]} = e(0)$, а так как $e_0 = \pi_0 e$, то $\|e_0\|^2_{D[S]} = \pi_0 e_0(0)$. Но из (1.1) видно, что

[1] Для произвольного линейного оператора T, через $Z(T)$ обозначаем ядро T. а через $R(T)$ — множество значений T.

$e_0(0)=\pi_0^{-1}$, поэтому $\|e_0\|_{D[S]}=1$. Отсюда, в силу (1.5) получаем, что $\|Se_0\|_{D[S_1]}=1$.

1.3. Следствие. На $D(S_1)$ определены линейные функционалы μ и ν, непрерывные относительно $\|\cdot\|_{D[S_1]}$, такие, что

$$\left.\begin{array}{l}\forall f\in D(S_1)\ f-\mu(f)\,Se_0\in D(S);\\ f-\mu(f)\,Se_0-\nu(f)\,e_0\in D(S_0).\end{array}\right\}\qquad(1.8)$$

Именно, $\mu(f)=(f\,|\,Se_0)_{D[S_1]}$; $\nu(f)=(f\,|\,e_0)_{D[S_1]}$ **(1.8′)**

В частности, $\nu(Se_0)=\nu(e_0)=1$; $\mu(e_0)=\nu(Se_0)=0$ **(1.8″)**.

Описание оператора S_1 можно подытожить следующим образом.

1.4. *Замечание.* Пусть $\hat{S}_1$ есть Фурье-образ оператора S_1, т. е., $D(\hat{S}_1)\overset{def}{=}\Phi D(S_1)$ и $\hat{S}_1\hat{f}\overset{def}{=}\widehat{S_1 f}$ при $f\in D(S_1)$. Тогда $D(\hat{S}_1)$ состоит в точности из тех $\hat{f}\in H$, для которых существует $k\in C$ такое, что $\int_{R^3}|\xi^2\hat{f}(\xi)-k|^2d\xi<\infty$ **(1.9)**. Если k есть именно такое число, то $\hat{S}_1\hat{f}(\xi)=\xi^2\hat{f}(\xi)-k$ **(1.10)** и $k=\pi_0/(2\pi)^{3/2}\mu(f)$ **(1.10′)**, где μ — функционал, определяемый условием (1.8).

Доказательство. Пусть для некоторого $k\in C$ выполняется (1.9). Тогда, определяя $\mu(f)$ посредством равенства (1.10′), находим, что $f-\mu(f)\,Se_0\in D(S)$, а поэтому $f\in D(S_1)$. Обратно пусть $f\in D(S_1)$, тогда в силу (1.5) $S_1f=S(f-\mu(f)\,Se_0)-\mu(f)\,e_0$ и $\hat{S}_1\hat{f}(\xi)=$
$=\xi^2[\hat{f}(\xi)-\mu(f)\,\widehat{Se}_0(\xi)]-\mu(f)\,\hat{e}_0(\xi)=\xi^2\hat{f}(\xi)-\frac{\pi_0}{(2\pi)^{3/2}}\mu(f)$.

1.5. Следствие. $D(S_1)$ *состоит в точности из тех $f\in H$, для которых существует $\lambda\in\boldsymbol{C}$, такое что $-\Delta f-\lambda\delta\in H$, где Δ — оператор Лапласа $D^1\to D^1$, а δ — распределение Дирака. Если λ есть именно такое число, то* $S_1f=-\Delta f-\lambda\delta$ **(1.11)** и $\lambda=\pi_0\mu(f)$ **(1.11′)**

1.6 *Замечание.* $\forall f\in D(S_1)$ числа $\mu(f)$ и $\nu(f)$ однозначно определяются условиями

$$\int_{R_3}(1+\xi^2)^2\left|\hat{f}(\xi)-\frac{\pi_0}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\mu(f)\,\xi^2}{\xi^4+1}\right|^2d\xi<\infty,\quad(1.12)$$

$$\int_{R^3}\left[\hat{f}(\xi)-\frac{\pi_0}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\mu(f)\,\xi^2+\nu(f)}{\xi^4+1}\right]d\xi=0.\quad(1.13)$$

2. Оказывается, что функционалы μ и ν допускают следующее x-представление.

2.1. **Теорема.** $\forall f\in D(S_1)$ *существуют конечные пределы*

$$\mu_0(f)\overset{def}{=}\lim_{x\to 0}|x|\,f(x)\ \ (2.1),\quad \nu_0(f)\overset{def}{=}\lim_{x\to 0}\left[f(x)-\frac{\mu_0(f)}{x}\right].\qquad(2.2)$$

Функционалы μ *и* ν *выражаются через* μ_0 *и* ν_0 *следующим образом* (см. (1.0)):

$$\mu(f) = \frac{4\pi}{\pi_0}\mu_0(f) \ (2.3), \quad \nu(f) = \pi_0\left[\nu_0(f) + \frac{1}{\sqrt{2}}\mu_0(f)\right]. \quad (2.4)$$

В частности $\forall f \in D(S) = H^2 \ \mu_0(f) = 0; \ \nu_0(f) = \delta(f) = f(0)$. (2.5)

Доказательство. Пусть $f \in D(S_1)$, а поэтому $f - \mu(f)Se_0 \in D(S)$. Согласно лемме 0.1, функция $f - \mu(f)Se_0$ является непрерывной, а поэтому $|x|[f(x) - \mu(f)Se_0(x)] \to 0$ при $x \to 0$. Но в силу (1.3) $|x|Se_0(x) \to \pi_0/4\pi$ при $x \to 0$. Следовательно, существует предел (2.1) и справедлива формула (2.3). Далее, учитывая, что $e_0 = \pi_0 e$ и, что $(Se_0|e_0)_{D[S_1]} = 0$, из (1.6) и (1.8″) получаем: $\forall f \in D(S_1)$ $\nu(f) = (f - \mu(f)Se_0|e_0)_{D[S_1]} = \pi_0\delta(f - \mu(f)Se_0)$. Однако из (1.3) следует, что $\lim\limits_{x\to 0}[(\pi_0/4\pi|x|) - Se_0(x)] = \pi_0^{-1}$. Поэтому существует предел (2.2) и справедлива формула (2.4).

2.2. *Замечание.* Пусть $f \in D(S_1)$, тогда $\hat{S}_1\hat{f}(\xi) = \xi^2\hat{f}(\xi) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mu_0(f)$, $S_1 f = -\Delta f - 4\pi\mu_0(f)\delta$ **(2.6).** Это вытекает непосредственно из 1.4, 1.5, 1.6 и 2.1.

3. *Числа* $\mu_0(f)$, $\nu_0(f)$ (а также числа $\mu(f)$, $\nu(f)$) естественно рассматривать как краевые значения (след в точке $x = 0$, функции $f \in D(S_1)$). Оказывается, что справедлива следующая формула Грина.

3.1. Утверждение. $\forall f, g \in D(S_1)\ (S_1 f|g) - (f|S_1 g) = \nu(f) \times \overline{\mu(g)} - \mu(f)\overline{\nu g} = 4\pi[\nu_0(f)\overline{\mu_0(g)} - \mu_0(f)\overline{\nu_0(g)}]$. **(3.1)**

Доказательство. Пусть $f, g \in D(S_1)$, так что $g - \mu(g)Se_0 - \nu(g)e_0 \in D(S_0)$. Поскольку $S_0 = S_1^*$, то $(S_1 f|g) = (f|S_0[g - \mu(g) \times Se_0 - \nu(g)e_0]) + (S_1 f|\overline{S e_0})\overline{\mu(g)} + (S_1 f|e_0)\overline{\nu(g)} = (f|S_1 g) + (f|e_0)_{D[S_1]} \times \overline{\mu(g)} - (f\ Se_0)_{D[S_1]}\overline{\nu(g)}$.

Учитывая (1.8′) приходим к (3.1).

3.2. *Определение.* Пусть $\forall\theta \in CD(S^\theta) \overset{\text{def}}{=} \{f \in D(S_1) : \nu_0(f) = \theta\mu_0(f)\}$ и $S^\theta f = S_1 f$ при $f \in D(S^\theta)$. Кроме того, положим $S^\infty \overset{\text{def}}{=} S$.

Из формулы Грина (3.1) очевидным способом вытекает следующее утверждение.

3.3. Утверждение. *Множество всех самосопряженных расширений оператора* S_0 *совпадает с множеством всех* S^θ, *таких что* $\theta \in \boldsymbol{R}$, *или* $\theta = \infty$.

4. Опишем спектр и резольвенту оператора S^θ. Ради краткости обозначим оператор S^θ через T. Таким образом, полагая $\forall f \in D(S_1)$ $\gamma_0(f) = \nu_0(f) - \theta\mu_0(f)$ **(4.1)**, имеем (см. 3.2) $D(T) \overset{\text{def}}{=} \{f \in D(S_1) : \gamma_0(f) = 0\}$, $T \subset S_1$ (4.2). Мы не предполагаем, что $\in \boldsymbol{R}$, так что T может быть и несамосопряженным.

4.1. ***Лемма.*** *Число ζ является собственным значением оператора S_1 тогда и только тогда, когда $\zeta \in \boldsymbol{C} \setminus [0, \infty[$. Каждое такое собственное значение является простым, а соответствующая собственная функция E_ζ выражается формулой*

$$E_\zeta(x) = -\frac{1}{4\pi |x|} e^{i\sqrt{\zeta}|x|}, \quad x \in \boldsymbol{R}^3. \tag{4.3}$$

Здесь и далее, значение $\sqrt{\zeta}$ (при $\zeta \in \boldsymbol{C} \setminus [0, \infty[$) выбираем так, чтобы $\operatorname{Im}\sqrt{\zeta} > 0$.

Доказательство. Согласно (2.6) уравнение $S_1 u = \zeta u$ эквивалентно уравнению $\xi^2 \hat{u}(\xi) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mu_0(u) = \zeta\hat{u}(\xi)$, откуда $\hat{u}(\xi) = \mathrm{const}\, \hat{E}_\zeta(\xi)$, где

$$\hat{E}_\zeta(\xi) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{1}{\xi^2 - \zeta}, \quad \xi \in \boldsymbol{R}^3. \tag{4.3$'$}$$

Ясно, что $\hat{E}_\zeta \in H$ тогда и только тогда, когда $\zeta \in \boldsymbol{C} \setminus [0, \infty[$. Выполнив обратное преобразование Фурье (см. доказательство теоремы 1.1), из (4.3′) получаем (4.3).

4.2. ***Лемма.*** *Для произвольных ζ, $\zeta_1 \in \boldsymbol{C} \setminus [0, \infty[$*

$$(E_\zeta \mid E_{\bar{\zeta}_1}) = \frac{1}{4\pi(\sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta_1})}. \tag{4.4}$$

Доказательство. В силу 4.1, $(E_\zeta \mid E_{\bar{\zeta}_1}) = \zeta^{-1}(S_1 E_\zeta \mid E_{\bar{\zeta}_1})$. Далее применяем формулу Грина (3.1), учитывая, что в силу (2.1), (2.2) и (4.3)

$$\mu_0(E_\zeta) = -\frac{1}{4\pi}, \quad \nu_0(E_\zeta) = -\frac{i\sqrt{\zeta}}{4\pi}. \tag{4.5}$$

Кроме того, следует учесть, $\sqrt{\bar{\zeta}} = -\overline{\sqrt{\zeta}}$, поскольку мы условились выбирать $\sqrt{\zeta}$ в верхней полуплоскости.

4.3. *Определение.* $\forall \zeta \in \boldsymbol{C} \setminus [0, \infty[$ $\gamma(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_0(E_\zeta) = \nu_0(E_\zeta) - \theta\mu_0(E_\zeta)$ (см. (4.1)). В силу 4.5 имеем $\gamma(\zeta) = \frac{i\theta + \sqrt{\zeta}}{4\pi i}$ **(4.5′)**.

4.4. ***Лемма.*** *Пусть $u \in D(S_1)$, $\zeta \in \boldsymbol{C} \setminus [0, \infty[$, $(S_1 - \zeta)u = f$. Тогда*

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\xi^2 - \zeta}\left[\hat{f}(\xi) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mu_0(u)\right]; \tag{4.6}$$

$$\gamma_0(u) = -(f \mid E_{\bar{\zeta}}) - 4\pi\gamma(\zeta)\mu_0(u). \tag{4.6$'$}$$

Доказательство. Формула (4.6) вытекает из (2.6). Положим $u_1(\xi) \stackrel{def}{=} (\xi^2 - \zeta)^{-1}\hat{f}(\xi)$, тогда $u_1 \in D(S)$, а поэтому (см. (2.5)) $\nu_0(u_1) = \delta(u_1) = (2\pi)^{-3/2}\int_{R^3} \hat{u}_1(\xi)\, d\xi = -(f \mid E_{\bar{\zeta}})$. Полагая $u_2 \stackrel{\text{def}}{=} u - u_1$, на основании (4.3′) и (4.5) заключаем, что $\nu_0(u_2) = i\sqrt{\zeta}\mu_0(u)$, откуда вытекает (4.6′).

4.5. **Теорема.** 1) *Если* $\mathrm{Re}\theta < 0$, *то оператор* T *имеет в точности одно собственное значение, именно,* $\lambda = -\theta^2$. *Это собственное значение — простое, с собственной функцией* E_λ (см. (4.3)). *Если* $\mathrm{Re}\theta \geqslant 0$ *или* $\theta = \infty$, *то* T *собственных значений не имеет.*

2) *Резольвентное множество* $\rho(T)$ *оператора* T *совпадает с* $\boldsymbol{C}\diagdown([0, \infty[\cup \{-\theta^2\})$, *если* $\mathrm{Re}\theta < 0$; *и с* $\boldsymbol{C}\diagdown[0, \infty[$, *если* $\mathrm{Re}\theta \geqslant 0$. *При* $\zeta \in \rho(T)$, $f \in H$

$$(T-\zeta)^{-1} f(x) = \int_{R^3} T(x, y; \zeta) f(y)\, dy, \tag{4.7}$$

где $$T(x, y, \zeta) \overset{def}{=} \frac{e^{i\sqrt{\zeta}|x-y|}}{4\pi|x-y|} + \frac{1}{\gamma(\zeta)} \frac{e^{i\sqrt{\zeta}(|x|+|y|)}}{(4\pi)^2|x||y|}. \tag{4.7'}$$

3) *Непрерывный спектр оператора* T *заполняет полуось* $[0, \infty[$.

Доказательство. 1) Из леммы 4.1 вытекает, что если λ есть собственное значение оператора T, то $\lambda \notin [0, \infty[$ и соответствующая собственная функция есть E_λ. Условие $E_\lambda \in D(T)$ приводит к равенству $\gamma(\lambda) = 0$ (см. (4.2)) или, в силу (4.5'), к равенству $\sqrt{\lambda} = -i\theta$. Поскольку $\mathrm{Im}\sqrt{\lambda} > 0$, то последнее равенство возможно лишь при $\mathrm{Re}\,\theta < 0$.

Пусть $R^\theta \overset{def}{=} \boldsymbol{C}\diagdown([0, \infty[\cup \{-\theta^2\})$, если $\mathrm{Re}\theta < 0$ и $R^\theta \overset{def}{=} \boldsymbol{C}\diagdown[0, \infty[$, если $\mathrm{Re}\theta \geqslant 0$. Пусть $\zeta \in R^\theta$, $u \in D(T)$ и $(T-\zeta)u = f$. Так как $T \subset S_1$, то согласно лемме 4.4 справедлива формула (4.6). Но так как $\gamma_0(u) = 0$, то в силу (4.6')

$$(\hat{T}-\zeta)^{-1}\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\xi^2-\zeta}\left(f(\xi) - \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{(f \mid E_{\bar\zeta})}{\gamma(\zeta)}\right); \tag{4.7''}$$

при этом, $\hat{T}$ обозначает Фурье — образ оператора $T: D(\hat{T}) \overset{def}{=} \Phi D(T)$ и $\hat{T}\hat{f} \overset{def}{=} \widehat{Tf}$ при $f \in D(T)$. Выполняя обратное преобразование Фурье из (4.7'') получаем (4.7).

Пусть, по-прежнему, $\zeta \in R^\theta$. Обозначим через $\hat{T}_\zeta \hat{f}(\xi)$ правую часть равенства (4.7''). Легко видеть, что так определенный оператор $\hat{T}_\zeta$ непрерывен $H \to H$, причем $R(\hat{T}_\zeta) \subset D(\hat{T})$ и $(\hat{T}-\zeta)\hat{T}_\zeta = 1_H$. Таким образом, $\hat{T}_\zeta = (\hat{T}-\zeta)^{-1}$ и $R^\theta \subset \rho(T)$. Обратное включение следует из дальнейшего.

Пусть $\mathrm{Re}\zeta = \sigma > 0$, $\mathrm{Im}\zeta = \tau \neq 0$ и $\varepsilon > 0$ — малое число. Далее, пусть $\hat{f}(\xi) = 1$ при $|\xi^2 - \sigma| < \varepsilon|\tau|$ и $\xi_3 > 0$; $\hat{f}(\xi) = 0$ при $|\xi^2 - \sigma| > \varepsilon|\tau|$ и $\xi_3 > 0$; и $\forall \xi \in \boldsymbol{R}^3 \hat{f}(-\xi) = -\hat{f}(\xi)$. Так как функция E_ζ четная, то $(f \mid E_{\bar\zeta}) = 0$, а поэтому (см. (4.7'')) $(\hat{T}-\zeta)^{-1}\hat{f}(\xi) = (\xi^2-\zeta)^{-1} f(\xi)$. Следовательно, $\|(T-\zeta)^{-1} f\|^2 =$

$$= \int_{|\xi^2-\sigma|<\varepsilon|\tau|} |\xi^2-\zeta|^{-2}\, d\xi \geqslant \frac{1}{(\varepsilon^2+1)\tau^2} \cdot \int_{|\xi^2-\sigma|<\varepsilon|\tau|} d\xi = \frac{1}{(\varepsilon^2+1)\tau^2}\|f\|^2,$$

откуда

$$\|(T-\zeta)^{-1}\| \geqslant \frac{1}{|\operatorname{Im}\tau|}. \tag{4.8}$$

Таким образом, полуось $[0, \infty[$ принадлежит спектру оператора $T = S^{\theta}$. Из формулы Грина (3.1) вытекает, что $T^* = S^{\bar{\theta}}$. Но уже доказано, что оператор $S^{\bar{\theta}}$ не имеет положительных собственных значений. Поэтому полуось $[0, \infty[$ принадлежит непрерывному спектру оператора T.

Отметим, что с точностью до обозначений, (4.7») совпадает с соответствующей формулой работы [1].

Во второй части настоящей статьи будет дано описание T — преобразования Фурье, диагонализующего оператор T.

Список литературы: 1. *Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д.* Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом. — Докл. АН СССР, 1961, **137,** № 5, с 1011—1014. 2. *Зельдович Я. Б.* Рассеяние сингулярным потенциалом в теории возмущений и в импульсном представлении. — ЖЭТФ, 1960, **38,** вып. 3, с. 819—824. 3. *Zirilli F.* Spectral Properties of Some One Dimensional «Singular» Schrödinger Hamiltonian. — Boll. Unione Mat. Ital., 1976, **13-B**, No. 5, p. 355—368. 4. *Широков Ю. М.* Сильно сингулярные потенциалы в трехмерной квантовой механике. — Теор. и мат. физ., 1980, **42,** № 1, с. 45—49. 5. *Zorbas J.* Perturbation of self-adjoint operators by Dirac distributions. —J. Math. Phys., 1980, **21**, No. 4, p. 840—847 6. *Albeverio S., Fenstad J. E., Hoegh-Krohn R.* Singular Perturbations and Nonstandard Analysis. — Trans. Amer. Math. Soc., 1979, **252,** p. 275—295 7. *Минлос Р. А., Фаддеев Л. Д.* Замечание о задаче трех частиц с точечным взаимодействием. — ЖЭТФ, 1961, **41,** № 6, с. 1850—1851. 8. *Минлос Р. А., Фаддеев Л. Д.* О точечном взаимодействии для системы из трех частиц в квантовой механике.— Докл. АН СССР, 1961, **141**, № 6, с 1335—1338. 9. *Демков Ю. Н., Островский В. Н.* Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1976—240 с. 10. *Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. —М.: Наука, 1971.—544 с. 11. *Лянце В. Э.* О некоторых отношениях между замкнутыми операторами. — Докл АН СССР, 1972, **204,** № 3, с. 542—545. 12 *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. — 528 с. 13. *Лянце В. Э.* Вполне регулярное возмущение непрерывного спектра. — Мат. сб., 1970, **82** (124), № 1 (5), с. 126—156.

Поступила в редколлегию 12.10.80.