УДК 517.535.4

Л. И. БЕЗУГЛАЯ

О СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ОГРАНИЧЕННЫХ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЧЕК ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ. I

Известна такая теорема М. Картрайт [1, гл. IV, § 5]: если целая функция $f(z)$ экспоненциального типа σ, $\sigma<\omega$, ограничена на последовательности точек вещественной оси: $|f(k\pi/\omega)|\leqslant M<\infty$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$, то она ограничена на всей вещественной оси, причем $|f(x)|\leqslant C(\sigma,\omega)\cdot M$, $(-\infty<x<\infty)$, где $C(\sigma,\omega)<<\infty$ зависит только от σ и ω.

В данной работе для некоторого класса субгармонических функций получены теоремы, аналогичные приведенной выше теореме М. Картрайт.

Непосредственный субгармонический аналог теоремы М. Картрайт сформулирован быть не может, как показывает следующий пример. Пусть $q_k=q_{-k}>0$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, $\sum q_k\cdot\ln|k|<\infty$, и пусть $v(z)=\ln|z|+\sum\limits_{k\neq0}q_k\cdot\ln|z-k|$. Тогда для субгармонической в плоскости функции $v(z)$ справедлива оценка $v(z)<\varepsilon|z|+O(1)$ $(|z|\to\infty)$ $\forall\varepsilon>0$. В целых точках функция $v(z)$ ограничена сверху: $v(n)=-\infty$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$, однако $v(n+{}^1/_2)\to\infty$.

Причиной, влекущей неограниченность функции $v(z)$ на вещественной оси, является наличие у ассоциированной с функцией $v(z)$ риссовской меры $(2\pi)^{-1}\Delta v(z)$ [3, гл. I, § 2] сколь угодно малых, но положительных «атомов» q_k. Если же исключить наличие у субгармонической функции таких мер, то можно доказать следующее предложение.

Теорема 1. *Пусть $v(z)$ — субгармоническая в комплексной плоскости функция, допускающая оценку роста*

$$v(z)\leqslant\sigma|z|+O(1)\quad(|z|\to\infty),\tag{1}$$

и пусть ассоциированная с ней риссовская мера $d\mu(z)=\frac{1}{2\pi}\Delta v(z)$ имеет только дискретную компоненту:

$$d\mu(z)=\sum_{i=1}^{\infty}m_i\cdot\delta(z-\lambda_i),\tag{2}$$

$$m_i\geqslant\varkappa>0\quad(i=1,\ 2,\ \ldots),\tag{3}$$

где $\varkappa$ — некоторая константа, λ_i — последовательность точек комплексной плоскости.

Пусть

$$\omega > \frac{\sigma}{\varkappa} \tag{4}$$

и пусть на последовательности точек $k\pi/\omega$ вещественной оси функция $v(z)$ ограничена сверху, т. е.

$$v\left(\frac{k\pi}{\omega}\right) \leqslant M < \infty \quad (k = 0, \pm 1, \ldots). \tag{5}$$

Тогда она ограничена сверху на всей вещественной оси:

$$v(x) \leqslant C + M \quad (-\infty < x < \infty), \tag{6}$$

где $C < \infty$ зависит только от σ, ω, $\varkappa$.

Теорема М. Картрайт, упомянутая выше, является следствием теоремы 1, так как атомы риссовской меры, ассоциированной с субгармонической функцией $v(z) = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ — аналитическая функция, — целые, и в выражении (2) m_i равны кратностям корней λ_i функции $f(z)$.

Теорема, аналогичная теореме 1, может быть сформулирована и в другом крайнем случае, когда риссовская мера, ассоциированная с субгармонической функцией, имеет плотность, причем эта плотность ограничена.

Теорема 2. *Пусть $v(z)$ — субгармоническая в комплексной плоскости функция, допускающая оценку роста* (1), *и пусть ассоциированная с ней риссовская мера $d\mu(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta v(z)$ удовлетворяет одному из следующих двух условий:*

а) *мера $d\mu(z)$ имеет ограниченную плотность относительно двумерной меры Лебега:*

$$d\mu(z) = P(z)\,dx\,dy, \text{ где } 0 \leqslant P(z) \leqslant A < \infty; \tag{7}$$

б) *мера $d\mu(z)$ сосредоточена на вещественной оси и имеет ограниченную плотность относительно одномерной меры Лебега:*

$$d\mu(z) = p(x)\,dx, \text{ где } 0 \leqslant p(x) \leqslant B < \infty. \tag{8}$$

Пусть функция $v(z)$ удовлетворяет условию (5). *Тогда она ограничена на вещественной оси, и для нее выполняется неравенство* (6).

Вместо условия (5) можно потребовать от функции $v(z)$ ограниченности сверху в точках z_k, близких к точкам $k\pi/\omega$, и требовать от ассоциированной с $v(z)$ риссовской меры выполнения условия, являющегося некоторой комбинацией условий (2), (3), (7), (8).

Назовем последовательность точек $\{z_k\}$ комплексной плоскости отделимой, если

$$|z_j - z_k| \geqslant d > 0 \quad (k \neq j;\ j, k = 0, \pm 1, \ldots). \tag{9}$$

Теорема 3. *Пусть $v(z)$ — субгармоническая в комплексной плоскости функция, допускающая оценку (1), и пусть ассоциированная с ней риссовская мера $d\mu(z)$ удовлетворяет условию*

$$d\mu(z)=\sum_{i=1}^{\infty} m_i\delta(z-\lambda_i)+P(z)\,dx\,dy+p(x)\,dx, \qquad (10)$$

где для m_i, $P(z)$ и $p(x)$ выполняются условия (3), (7), (8). *Пусть $\{z_k\}$ — отделимая последовательность точек комплексной плоскости, удовлетворяющая условию*

$$\left|z_k-\frac{k\pi}{\omega}\right|\leqslant L<\infty, \qquad (11)$$

а для ω выполняется неравенство (4). *Пусть*

$$v(z_k)\leqslant M<\infty \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots). \qquad (12)$$

Тогда функция $v(z)$ ограничена сверху на вещественной оси и для нее выполняется неравенство (6), *где $C<\infty$ зависит только от ω, σ, $\varkappa$, d, L, но не от v и M.*

Предварительно докажем несколько фактов из теории потенциала.

Лемма 1. *Пусть K — компакт в круге $|z|\leqslant R/2$, пусть $G(z,\zeta)$ — функция Грина круга $|z|<R$: $G(z,\zeta)=\ln\left|\frac{R^2-\zeta\bar{z}}{R(z-\zeta)}\right|$. Пусть пересечение компакта K с любой окружностью $|z|=r$, $r\leqslant\frac{R}{2}$, непусто. Тогда емкость $\operatorname{cap}K$ (относительно потенциала Грина) компакта K оценивается снизу: $\operatorname{cap}K\geqslant c>0$, где $c>0$ не зависит от K (в качестве c можно взять емкость отрезка $0\leqslant x\leqslant R/2$).*

Доказательство. Назовем круговой проекцией точки $z=|z|e^{i\theta}$ точку $z^*=|z|$ положительной полуоси, а круговой проекцией K^* компакта K множество $K^*=\{z^*:z\in K\}$. Из условия леммы следует, что $K^*=\{x:0\leqslant x\leqslant R/2\}$. Нетрудно проверить, что для любых z, ζ таких, что $|z|<R$, $|\zeta|<R$, выполняется неравенство

$$G(z,\zeta)\leqslant G(z^*,\zeta^*). \qquad (13)$$

Покажем, что $\operatorname{cap}K\geqslant\operatorname{cap}K^*$. Как известно [2, гл. II, § 1], емкость компакта K является решением следующей экстремальной задачи:

$$(\operatorname{cap}K)^{-1}=\inf\left\{\iint_{K\times K} G(z,\zeta)\,dm(z)\,dm(\zeta)\right\}, \qquad (14)$$

где точная нижняя грань берется по всем положительным борелевским мерам, удовлетворяющим условию $m(K)=1$. Обозначим через dm^* меру, индуцированную на радиусе $0\leqslant x\leqslant R/2$ мерой

dm при отображении $z \to z^*$. Из формулы (13) следует, что для любой меры $dm \geqslant 0$

$$\iint\limits_{K \times K} G(z, \zeta)\, dm(z)\, dm(\zeta) \leqslant \iint\limits_{K^* \times K^*} G(z^*, \zeta^*)\, dm^*(z)\, dm^*(\zeta),$$

откуда и из выражения (14) следует неравенство $\operatorname{cap} K \geqslant \operatorname{cap} K^*$. Так как K^* — отрезок $0 \leqslant x \leqslant R/2$, то емкость Грина этого отрезка положительна, поскольку существует сосредоточенная на этом отрезке мера с конечной энергией (например, одномерная мера Лебега). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть K — компакт в круге $|z| \leqslant R/2$, $G(z, \zeta)$ — функция Грина круга $|z| < R$. Пусть пересечение компакта K с каждой окружностью $|z| = r$, $0 \leqslant r \leqslant R/2$, непусто. Тогда существует мера $d\nu$,*

$$d\nu \geqslant 0, \quad \operatorname{supp} d\nu \subseteq K, \quad \int\limits_K d\nu(z) = 1, \tag{15}$$

такая, что

$$\left| \int\limits_K \ln|z - \zeta|\, d\nu(\zeta) \right| \leqslant N < \infty \quad (\forall z: |z| \leqslant R), \tag{16}$$

где N зависит от R, но не от K.

Доказательство. Так как емкость Грина компакта K положительна, то на K существует равновесная мера, решающая задачу Робэна [2, гл. II, § 1]. В качестве меры $d\nu$ возьмем пропорциональную ей меру, нормированную условием (15). Потенциал Грина этой меры удовлетворяет условиям:

$$\int\limits_K G(z, \zeta)\, d\nu(\zeta) \leqslant (\operatorname{cap} K)^{-1} \leqslant \frac{1}{c} \quad (|z| < R), \tag{17}$$

где c — константа из леммы 1, $\int\limits_K G(z, \zeta)\, d\nu(\zeta) = (\operatorname{cap} K)^{-1}$ для всех z из K за исключением, быть может, подмножества K емкости нуль. Так как $\zeta \in K$, то $|\zeta| \leqslant R/2$ и для $3R/4 \leqslant |z| < R$ имеем неравенство [см. формулу (15)] $\int\limits_K |\ln|z - \zeta||\, d\nu(\zeta) \leqslant \max\left\{\left|\ln \frac{R}{4}\right|, |\ln 2R|\right\}$. Из выражения (17) и явного вида функции Грина следует неравенство $\left|\int\limits_K \ln \frac{1}{|z - \zeta|}\, d\nu(\zeta)\right| \leqslant \left|\int\limits_K \ln\left|\frac{R^2 - \xi\bar{z}}{R}\right| d\nu(\zeta)\right| + \frac{1}{c}$, а если $|z| \leqslant \frac{3}{4} R$, из него получаем $\left|\int\limits_K \ln|z - \zeta|\, d\nu(\zeta)\right| \leqslant \frac{1}{c} + \max\left\{\left|\ln \frac{R}{4}\right|, |\ln 2R|\right\}$.

Таким образом, лемма 2 справедлива, и в формуле (16) можно положить $N = \frac{1}{c} + \max\left\{\left|\ln \frac{R}{4}\right|, |\ln 2R|\right\}$.

Лемма 3. *Пусть* $h(z)$ — *функция, гармоническая в круге* $|z| \leqslant R$, *и пусть* $K = \{z : h(z) = h(0)\}$. *Тогда пересечение множества* K *с каждой окружностью* $|z| = r$, $0 \leqslant r < R$, *непусто.*

Доказательство. Можно считать, что $h(z) \not\equiv h(0)$. Обозначим $K^+ = \{z : h(z) > h(0)\}$, $K^- = \{z : h(z) < h(0)\}$. Каждое из открытых в $|z| < R$ множеств K^+ и K^- имеет непустое пересечение с любым кругом $|z| < r$, $0 < r < R$, иначе по принципу максимума выполнялось бы $h(z) \equiv h(0)$. Предположим, что некоторая окружность $|z| = r_0$, $0 < r_0 < R$, не пересекается с множеством K. Тогда эта окружность целиком лежит в одном из множеств K^+ или K^-. Пусть, например, она лежит в K^+. Тогда часть множества K^-, лежащая в круге $|z| \leqslant r_0$ есть непустое открытое множество строго из внутренности круга $|z| < r_0$, поэтому граница этого открытого множества целиком содержится в множестве K. Таким образом, гармоническая функция $h(z)$ удовлетворяет неравенству $h(z) < h(0)$ всюду внутри открытого множества и $h(z) = h(0)$ на его границе, что противоречит принципу максимума. Лемма доказана. Доказательство теорем будет дано в следующей части статьи.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956. 632 с. **2.** *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М., Наука, 1966. 516 с. **3.** *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. М., Наука, 1971. 432 с.

Поступила 4 июля 1977 г.