УДК 517.95 + 517.55 + 513.88

М. Ф. БЕССМЕРТНЫЙ

ИМПЕДАНСЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ КЛАССА МИН НАЙ-ДА КАК АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ. I

Электрическая цепь класса Мин Най-да [1] представляет собой $2n$-полюсник («реактивный»), содержащий конденсаторы и катушки, но не идеальные, а с потерями. Как известно [3, с. 15], потери энергии в таких элементах всегда могут быть учтены путем введения схем замещения «реальных» элементов «идеальными реактивными» и «идеальными резисторами», а именно: схемой замещения «реальной» катушки является «идеальная катушка», соединенная последовательно с «идеальным резистором», схемой замещения «реального» конденсатора является «идеальный конденсатор» с включенным параллельно ему «идеальным резистором».

Таким образом, любая «реактивная» цепь, состоящая из «реальных» конденсаторов и катушек, всегда пассивна, но, конечно же, так получают пассивные электрические цепи весьма специального вида. Класс электрических цепей Мин Най-да — это подкласс класса всех «реактивных» цепей, состоящих из «реальных» индуктивностей и емкостей, выделенный тем условием, что все входящие в цепь катушки обладают одним (общим для всех катушек), а все конденсаторы — одним (общим для всех конденсаторов) качеством. Формально это значит, что все резисторы, фигурирующие в схемах замещения «реальных» катушек «идеальными», имеют сопротивление, пропорциональное индуктивности катушек (коэффициент пропорциональности один и тот же для всех катушек, входящих в схему, и характеризует «качество» реальных катушек), и что резисторы, входящие в схемы замещения «реальных» конденсаторов, имеют проводимость, пропорциональную емкости конденсаторов (коэффициент пропорциональности один и тот же для всех конденсаторов, входящих в схему, и характеризует качество реальных конденсаторов).

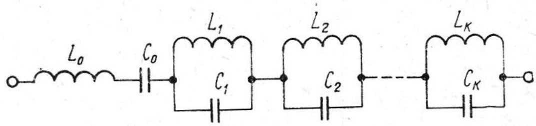


Рис. 1.

Практическая направленность рассмотрений, связанных с цепями Мин Най-да, предельно ясна. Скажем, в достаточно широком диапазоне емкостей и частот потери в бумажных конденсаторах с данным сортом бумаги в качестве диэлектрика пропорциональны емкости конденсатора, где коэффициент пропорциональности определяется лишь сортом бумаги (а значит, один и тот же для всех конденсаторов схемы, коль скоро в ней участвуют лишь конденсаторы с какой-то одной бумагой-диэлектриком). То же относится и к катушкам, если их обмоточный провод однотипен и материал сердечников один и тот же.

Наличие потерь, распределенных специальным образом между элементами цепи, усложняет ее анализ по сравнению с электрическими цепями, содержащими идеальные катушки и конденсаторы, то есть «чисто реактивными» цепями.

Известно, что если цепь чисто реактивная, то ее всегда можно представить в некотором каноническом виде. Так, теорема Фостера [3, 4] утверждает, что для любого двухполюсника, состоящего из идеальных катушек и конденсаторов, существует канонический «цепочечный» двухполюсник, содержащий идеальные катушки и конденсаторы и имеющий тот же импеданс. Схема такого канонического двухполюсника имеет следующий вид (рис. 1).

Это есть так называемая схема Фостера типа I. Мы не останавливаемся здесь на схеме Фостера типа II, а также на канонических лестничных схемах Кауэра. Заметим, что для получения этих схем необходимо:

а) выделить класс функций, являющихся импедансами чисто реактивных двухполюсников;

б) получить некоторое каноническое представление, справедливое для любой функции этого класса. Выбор представления определяет ту или иную каноническую схему (так, в случае схем Фостера это разложение на простые дроби, а в случае лестничных схем Кауэра — представление импеданса в виде цепной дроби).

В первой части настоящей работы мы выделяем некоторый класс $\boldsymbol{P}$ функций и показываем, что импедансы цепей Мин Най-да принадлежат классу $\boldsymbol{P}$, во второй — получаем каноническое представление функций класса $\boldsymbol{P}$ и с его помощью показываем, что любая функция класса $\boldsymbol{P}$ реализуема посредством «цепочечной» схемы Фостера типа I из «реальных» элементов.

Оказывается, что математическим аппаратом, адекватным цепям класса Мин Най-да, являются функции не одной, как это принято в теории цепей, а двух комплексных переменных. Средством, позволяющим выделить требуемый класс функций двух переменных, является теорема Ланжевена. В работе [2] произвольный электрический $2n$-полюсник рассматривается как граф Кирхгофа. Для графа Кирхгофа доказывается теорема Ланжевена, представляющая собой обобщение известной в теории цепей теоремы о равенстве выделяемой и поглощаемой в ветвях электрической цепи активной (реактивной) мощности. При этом характеристические свойства матрицы сопротивлений $2n$-полюсника получаются как логические следствия теоремы Ланжевена.

Граф G называется графом Кирхгофа, если:

1) число вершин и число ребер графа — конечно, причем каждое ребро инцидентно точно одной паре вершин;

2) вершины, ребра и циклы графа перенумерованы, а ребра и циклы, кроме того, ориентированы;

3) каждому ребру p_j сопоставлены величины I_j и U_j (числа или функции, действительные или комплексные), так, что выполняются:

а) $A \cdot \vec{I} = 0$ — 1-й закон Кирхгофа (A — матрица инциденций графа G; $\vec{I}$ — вектор-колонна с координатами I_j);

б) $B \cdot \vec{U} = 0$ — 2-й закон Кирхгофа (B — матрица циклов графа G; $\vec{U}$ — вектор-колонна с координатами U_j).

Сформулируем теперь теорему Ланжевена.

Для всякого графа Кирхгофа справедливы соотношения $\sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant l} (\bar{U}_j \cdot I_j + U_j \cdot \bar{I}_j) = 0$; $\sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant l} (\bar{U}_j \cdot I_j - U_j \cdot \bar{I}_j) = 0$, где l — число ребер графа; черта означает переход к комплексно-сопряженным величинам. Доказательство этой теоремы можно найти в работе [2]. По поводу свойств матриц инциденций и циклов см. [5].

Рассмотрим некоторый $2n$-полюсник Мин Най-да, внутренние ветви которого содержат «реальные» катушки и конденсаторы, а также идеальные трансформаторы.

Приведем характеристики типовых элементов, т. е. соотношения между напряжениями $U(t)$ и токами $I(t)$ на элементах.

1) Катушка с индуктивностью L (рис. 2):

$$U(t) = k_\mu \cdot L \cdot I(t) + L \cdot \frac{dI}{dt}, \quad (k_\mu \geqslant 0, \; L > 0). \tag{1}$$

б) Конденсатор с емкостью C (рис. 3):

$$I(t) = k_\varepsilon \cdot C \cdot U(t) + C \cdot \frac{dU}{dt}, \quad (k_\varepsilon \geqslant 0, \; C > 0). \tag{2}$$

3) Идеальный $2 \times 2m$-трансформатор (рис.4):

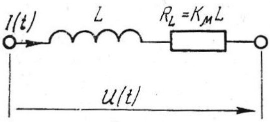
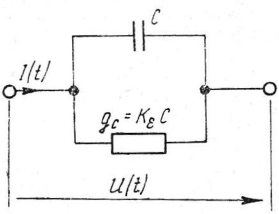


Рис. 2.

$$\begin{bmatrix} U_1(t) \\ \vdots \\ U_m(t) \\ I_1(t) \\ \vdots \\ I_m(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} t' & 0 \\ \hline 0 & t^{-1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \tilde{U}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{U}_m(t) \\ \tilde{I}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{I}_m(t) \end{bmatrix} \tag{3}$$



Рит. 3.

Здесь t — матрица передаточных чисел, $t = [t_{i,j}]_{i,j=1}^{m}$, где $t_{i,j}$ — коэффициенты трансформации идеальных трансформаторов, из которых составлен идеальный $2 \times \times 2m$-трансформатор. Коэффициенты t_{ij} должны быть выбраны так, чтобы матрица t была неособенной. И обратно, если задана произвольная вещественная неособенная матрица t размера $m \times m$, то всегда можно построить соответствующий ей идеальный $2 \times 2m$-трансформатор.

Перейдем от напряжений и токов в ветвях $2n$-полюсника к их лапласовым преобразованиям при нулевых начальных условиях. Преобразование Лапласа функции $f(t)$ будем обозначать $f(\lambda)$: $f(\lambda) = \int\limits_0^\infty f(t) \cdot e^{-\lambda t}\, dt$. Из соотношений (1) и (2) сразу же получаем:

$$U(\lambda) = (k_\mu + \lambda) \cdot L \cdot I(\lambda); \quad \mathbf{(1')} \qquad I(\lambda) = (k_\varepsilon + \lambda) \cdot C \cdot U(\lambda). \quad \mathbf{(2')}$$

Так как мы не хотим отделять индуктивность L от сопротивления $R = k_\mu L$ резистора, учитывающего потери энергии в ней, то естественно величину $\lambda^\mu = \lambda + k_\mu$ рассматривать как новую переменную, жестко связанную с катушками индуктивности $2n$-полюсника, а величину $\lambda^\varepsilon = \lambda + k_\varepsilon$ — как переменную, жестко связанную с конденсаторами $2n$-полюсника. Хотя между переменными λ^μ и λ^ε существует естественная связь, мы будем предлагать, что λ^μ и λ^ε изменяются произвольно, независимо друг от друга. При таком рассмотрении все напряжения и токи в ветвях $2n$-полюсника будут функциями переменных λ^μ и λ^ε. Составив для всех ветвей (в том числе и внешних) уравнения по 1-му и 2-му законам Кирхгофа, а для внутренних ветвей по закону Ома, в большинстве случаев путем исключения напряжений и токов внутренних ветвей можно получить соотношение

$$\begin{bmatrix} U_1(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) \\ \vdots \\ U_n(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) \ldots Z_{1n}(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Z_{n1}(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) \ldots Z_{nn}(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) \\ \vdots \\ I_n(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Здесь $U_j(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)$ и $I_j(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — напряжения и токи внешних ветвей $2n$-полюсника (рис. 5).

Матрицу-функцию $Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = [Z_{i,j}(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)]_{i,j=1}^n$ будем называть матрицей обобщенных сопротивлений (импедансов) $2n$-полюсника. Обычный импеданс $Z(\lambda)$

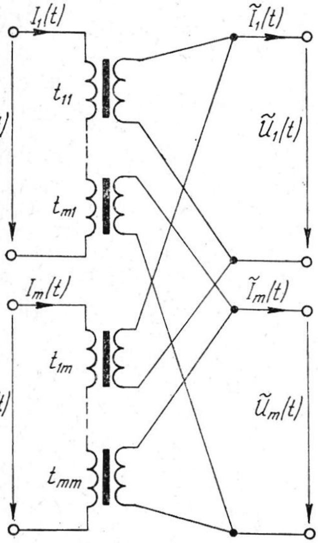


Рис. 4.

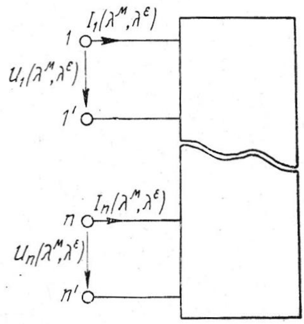


Рис. 5.

может быть получен, если рассматривать обобщенный импеданс при $\lambda^\mu = \lambda + k_\mu$, $\lambda^\varepsilon = \lambda + k_\varepsilon$: $Z(\lambda) = Z(\lambda + k_\mu, \lambda + k_\varepsilon)$.

Применим теперь теорему Ланжевена для вывода характеристических свойств матрицы обобщенных сопротивлений $2n$-полюсника Мин Най-да. Для этого преобразуем $2n$-полюсник в граф Кирхгофа [см. 2] и запишем теорему Ланжевена с учетом ориентации приборов во внешних ветвях: $\overrightarrow{U^*} \cdot \overrightarrow{I} + \overrightarrow{I^*} \cdot \overrightarrow{U} = \sum (\overline{U}_j \cdot I_j + U_j \cdot \overline{I}_j)$; $\overrightarrow{U}^* \cdot \overrightarrow{I} - \overrightarrow{I}^* \cdot \overrightarrow{U} = \sum (\overline{U}_j \cdot I_j - \overline{I}_j \cdot U_j)$. Здесь $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{I}$ — векторы-колонны напряжений и токов внешних ветвей U_j, I_j — напряжения и токи внутренних ветвей, звездочка означает переход к эрмитово-сопряженной матрице.

Учитывая соотношения (1′), (2′), (3), (4), нетрудно получить $\overrightarrow{I}^*(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) \cdot [Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) + Z^*(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)] \cdot \overrightarrow{I}(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = (\lambda^\mu + \overline{\lambda^\mu}) \cdot \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant l} L_j \times$

$\times |I_j(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)|^2 + (\lambda^\varepsilon + \overline{\lambda}^\varepsilon) \sum_{1 \leqslant j \leqslant c} C_j |U_j(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)|^2;$ $\quad \vec{I}^*(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) \times$ $\times [Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) - Z^*(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)] \cdot \vec{I}(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = (\lambda^\mu - \overline{\lambda^\mu}) \cdot \sum_{1 \leqslant j \leqslant l} L_j \cdot |I_j(\lambda^\mu,$ $\lambda^\varepsilon)|^2 + (\overline{\lambda}^\varepsilon - \lambda^\varepsilon) \sum_{1 \leqslant j \leqslant c} C_j |U_j(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)|^2$, где l — число ветвей, содержащих катушки индуктивности, c — число ветвей, содержащих конденсаторы. Слагаемые, соответствующие группе ветвей образующих идеальный трансформатор, аннулируются. Так как (по самому построению) элементами матрицы $Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)$ являются дробно-рациональные функции с вещественными коэффициентами, из последних равенств следует, что $Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)$ удовлетворяет таким условиям:

1) $Z^*(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) + Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) \geqslant 0, \quad (\operatorname{Re}\lambda^\mu \geqslant 0,\ \operatorname{Re}\lambda^\varepsilon \geqslant 0);$
2) $Z^*(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) + Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = 0, \quad (\operatorname{Re}\lambda^\mu = 0,\ \operatorname{Re}\lambda^\varepsilon = 0);$
3) $i[Z^*(\lambda^\mu, \mu^\varepsilon) - Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)] \geqslant 0, \quad (\operatorname{Im}\lambda^\mu \geqslant 0,\ \operatorname{Im}\lambda^\varepsilon \leqslant 0);$
4) $Z^*(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) - Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = 0, \quad (\operatorname{Im}\lambda^\mu = 0,\ \operatorname{Im}\lambda^\varepsilon = 0);$
5) $Z(\overline{\lambda^\mu}, \overline{\lambda^\varepsilon}) = \overline{Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)}.$

Здесь черта — знак комплексного сопряжения, звездочка — операция перехода к эрмитово-сопряженной матрице.

Определение. *Класс P — это класс дробно-рациональных квадратных матриц-функций двух комплексных переменных, удовлетворяющих перечисленным выше условиям* 1—5.

Нами доказана в сторону необходимости

Теорема 1. *Для того, чтобы матрица-функция $Z(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)$ была матрицей обобщенных импедансов $2n$-полюсника Мин Най-да, необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала классу P.*

Список литературы: **1.** *Nai-Ta Ming*. Verwirklichung von linearen Zweipolschaltungen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit unter Berücksichtigung übereinstimmender Verluste aller Spulen und Kondensatoren. — Archiv für Elektrotechnik, 1949, Bd 39, № 6, S. 359—387, № 7, S. 452—471. **2.** *Ефимов А. В., Потапов В. П.* J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей. УМН, 1973, т. 23, вып. 1, с. 75—130. **3.** *Атабеков Г. И.* Теория линейных электрических цепей. М., Сов. радио, 1960. 220 с. **4.** *Карни Ш.* Теория цепей. Анализ и синтез. М., Связь, 1973. 386 с. **5.** *Сешу С., Рид М. Б.* Линейные графы и электрические цепи. М., Высш. школа, 1971. 448 с.

Поступила 28 декабря 1977 г.