УДК 513.88:517.51 *Ю. И. ЛЮБАРСКИЙ*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ H^p В ПОЛУПЛОСКОСТИ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

В статье приводится теорема о представлении функций, принадлежащих H_+^p — пространству Харди в верхней полуплоскости и связанные с нею утверждения: о представлении функций из пространства Харди в полосе, об условиях единственности для классов функций в полуплоскости, о представлении целых функций экспоненциального типа (ц. ф. э. т.) с треугольной индикаторной диаграммой.

§ 1. Представление функций из H^p в полуплоскости и полосе. Мы начнем с теоремы о представлении функций в полуплоскости.

Теорема 1. *Пусть* $\sigma(\alpha)$ — *функция ограниченной вариации* (ф. о. в.) *на* $[0, \infty)$, *такая, что*

$$\inf_{t \geqslant 0} \left| \int_0^\infty e^{-\alpha t} \, d\sigma(\alpha) \right| > 0. \tag{1}$$

Тогда оператор

$$S_\sigma : g(z) \overset{\text{def}}{\to} \int_0^\infty g(z + i\alpha) \, d\sigma(\alpha) \tag{2}$$

обратим в H^p_+.

Доказательство проведем вначале для $p = 2$. По теореме Винера—Пэли [1] функции $f \in H^2_+$ представимы в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \varphi_f(t) \, e^{itz} \, dt; \quad \varphi_f \in L^2 \ (0, \infty).$$

Оператор S_σ с помощью преобразования Фурье записывается в виде

$$S_\sigma g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \varphi_g(t) \int_0^\infty e^{-\alpha t} \, d\sigma(\alpha) \, e^{itz} \, dt.$$

Поэтому оператор T, определённый равенством

$$T : f(z) \to \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi_f(t)}{\int_0^\infty e^{-\alpha t} \, d\sigma(\sigma)} \, e^{itz} \, dt,$$

является, при выполнении условий теоремы, ограниченным оператором в H^2_+, очевидно, обратным к S_σ. Для $p = 2$ утверждение теоремы доказано. В случае произвольного $p \in (1, \infty)$ для доказательства теоремы достаточно продолжить оператор T с множества $H^2_+ \cap H^p_+$ до ограниченного оператора в H^p_+ — тогда мы получим ограниченный оператор, обратный на плотном множестве $(H^2_+ \cap H^p_+)$ оператору S_σ. Другими словами, достаточно убедиться в том, что функция $m(t) \overset{\text{def}}{=} \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} \, d\sigma(\alpha) \right)^{-1}$ является мультипликатором (определение см., напр., в [2], с. 113) в пространствах L^p при $\infty > p > 1$. Из теоремы Марцинкевича (теорема 6 гл. IV в [2]) следует, что для того, чтобы функция была мультипликатором достаточно, чтобы $\sup_{t \geqslant 0} |m(t)| < \infty$ и $m'(t) \in L^1(0, \infty)$. Эти свойства функции

$m(t)$ прямо вытекают из условия (1) и ограниченности вариации функции $\sigma(\alpha)$. Теорема доказана.

Пусть $a < b$. Напомним, что через $H^p(a, b)$ обозначается пространство функций $f(z)$, голоморфных в полосе $a < \operatorname{Im} z < b$ и таких, что

$$\| f \|^p_{H^p(a,\,b)} \overset{\text{def}}{=} \sup_{a<y<b} \int\limits_0^\infty | f(x+iy)|^p \, dx < \infty .$$

Такие пространства изучены в [4]. В частности, известно, что функции $f \in H^p(a, b)$ имеют предельные (в смысле L^p) значения $f(t+ia)$, $f(t+ib)$ и $\| f \|_{H^p(a,\,b)} \asymp \max (\| f(t+ia) \|_{L^p}, \| f(t+ib) \|_{L^p})$.

Для применения теоремы 1 к функциям из пространства $H^p(a, b)$ нам понадобится следующая

Лемма 1. *Любая функция $f(z) \in H^p(a, b)$, $(1 < p < \infty)$ единственным образом представима в виде $f(z) = g_+(z-ia) - g_-(z-ib)$,* (3) *где функции $g_\pm$ принадлежат пространствам Харди $H^p_\pm$ в верхней и нижней полуплоскостях соответственно.*

Доказательство сразу получается из формулы Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t+ia)}{t-z+ia} dt - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t+ib)}{t-z+ib} dt \right),$$

в которой первое и второе слагаемые правой части определяют (см., напр., [4]) функции g_+ и g_- соответственно. Единственность представления (3) сразу следует из теоремы Лиувилля.

Сочетание леммы 1 и теоремы 1 даёт нам следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть числа θ_1, $\theta_2 > 0$ и функция $\sigma(\alpha)$ ограниченной вариации на $[-\theta_1, \theta_2]$ такова, что*

$$\inf_{t \geqslant 0} \left| \int\limits_0^{\theta_1+\theta_2} e^{-\beta t} d\sigma(\beta - \theta_1) \right| > 0 \text{ и } \inf_{t \geqslant 0} \left| \int\limits_0^{\theta_1+\theta_2} e^{-\beta t} d\sigma(\theta_2 - \beta) \right| > 0. \quad (4)$$

Тогда оператор $S_\sigma : H^p(a-\theta_1, b+\theta_2) \to H^p(a, b)$ определенный равенством $S_\sigma : g(z) \to \int\limits_{-\theta_1}^{\theta_2} g(z+i\alpha)\, d\sigma(\alpha)$ (5), *обратим.*

Выделим интересующий нас частный случай этой теоремы:

Следствие 1. *Если числа A_1, $A_2 \in \boldsymbol{C}$ таковы, что*

$$A_1 e^{\theta_1 t} + A_2 e^{-\theta_2 t} \neq 0, \ t \geqslant 0 \text{ и } A_2 e^{\theta_1 t} + A_1 e^{-\theta_2 t} \neq 0, \ t \geqslant 0,$$

то любая функция $f(z) \in H^p(a, b)$ допускает единственное представление $f(z) = A_1 g(z-i\theta_1) + A_2 g(z+i\theta_2)$ (6) *с функцией $g \in H^p(a-\theta_1, b+\theta_2)$, причем $\| f \|_{H^p(a,\,b)} \asymp \| g \|_{H^p(a-\theta_1,\,b+\theta_2)}$* (7).

Обозначим, через $H^p(a, b; e^{hx})$ пространство функций $f(z)$, аналитических в $a < \operatorname{Im} z < b$ и таких, что

$$\| f \|^p_{H^p(a, b; e^{hx})} \stackrel{df}{=} \sup_{a<y<b} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p e^{hx}\, dx < \infty.$$

Следствие. 2. *Пусть* $\theta \in (0, \pi/2)$, $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$, $h \in \mathbf{R}$. *Любая функция* $f \in H^p(-\theta', \theta'; e^{hx})$ *единственным образом представима в виде* $f(z) = g(z + i\theta) - g(z - i\theta)$ (8), *где* $g \in H^p(-\pi, \pi; e^{hx})$ и $\| g \|_{H^p(-\pi, \pi; e^{hx})} \asymp \| f \|_{H^p(-\theta, \theta; e^{hx})}$.

Это утверждение получаем из следствия 1 и из того факта, что отображение $f(z) \to f(z) e^{z\frac{h}{p}}$ есть изоморфизм пространств $H^p(a, b; e^{hx})$ и $H^p(a, b)$.

§ 2. **Теоремы единственности для функций, голоморфных в полуплоскости.** Обозначим через $H^p(\alpha; \Delta)$ пространство функций $F(w)$ аналитических в угле $|\arg w| < \alpha$ с нормой[1]

$$\| F \|^p_{H^p(\alpha; \Delta)} \stackrel{df}{=} \sup_{|\theta| < \alpha} \int_0^{\infty} |F(\rho e^{i\theta})|^p \rho^{\Delta}\, d\rho < \infty.$$

Хорошо известно, [9], что для того, чтобы последовательность точек $\{w_k\}_1^{\infty}$, $\operatorname{Re} w_k > 0$, была последовательностью нулей функции из $H^p_п$-пространства Харди в правой полуплоскости (и вообще функции ограниченного вида в правой полуплоскости), необходимо и достаточно, чтобы $\sum_k (1 + |w_k|^2)^{-1} \operatorname{Re} w_k < \infty$.

Выберем число $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и положим $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$. Каждой последовательности точек $\{w_k\}_1^{\infty}$, лежащей в секторе $|\arg w| < \theta'$, можно сопоставить последовательность функционалов L_k в пространстве $H^p_п$:

$$L_k[F] \stackrel{df}{=} F(w_k e^{i\theta}) - F(w_k e^{-i\theta}). \tag{9}$$

В каком случае в пространстве $H^p_п$ существует функция, аннулирующая эти функционалы? Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть последовательность* $\{w_k\}_1^{\infty}$ *такова, что* $|\arg w_k| < \theta'$ *а функционалы* L_k *определены равенствами* (9). *Для*

[1] Эти пространства не являются новыми. При $p = 2$ они впервые были рассмотрены в [5] и подробно исследованы в [6]. При произвольном $p \in (1, \infty)$ были введены в [3, 8], где, в частности, показано, что пространство $H^p\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ совпадает с обычным пространством Харди в правой полуплоскости. Обозначения работ [5—8] несколько отличаются от использованных нами.

того, чтобы существовала функция $F \in H^p_\text{п}$ *такая, что* $L_k[F]=0$, $k=1, 2, \ldots$ **(10)**, *необходимо и достаточно, чтобы* $\sum\limits_k (1+|w_k|^{\frac{\pi}{\theta'}})^{-1} \operatorname{Re} w_k^{\frac{\pi}{2\theta'}} < \infty$. **(11)**

Доказательство. Пусть функция $F \in H^p_\text{п}$ удовлетворяет (10). Тогда последовательность $\{w_k\}_1^\infty$ является последовательностью нулей функции $G(w) = F(e^{i\theta} w) - F(e^{-i\theta} w)$ **(12)**, принадлежащей пространству $\boldsymbol{H}^p(\theta';\ 0)$. Отображение $G(w) \mapsto \Gamma(w) \stackrel{\text{df}}{=} G(w^{2\theta'/\pi})$ устанавливает изоморфизм между пространствами $\boldsymbol{H}^p(\theta';\ 0)$ и $\boldsymbol{H}^p\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{2\theta'}{\pi}-1\right)$. Поэтому последовательность $\{w_k^{\pi/2\theta'}\}_{k=1}^\infty$, есть последовательность нулей функции $\Gamma(w) \in \boldsymbol{H}^p\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{2\theta'}{\pi}-1\right)$ являющейся функцией ограниченного вида и, следовательно, выполнено (11). Обратно из (11) вытекает существование функции $\Gamma(w) \in \boldsymbol{H}^p\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{2\theta'}{\pi}-1\right)$, обращающейся в нуль в точках $\{w_k^{\pi/2\theta}\}$, и, следовательно, функции $G \in \boldsymbol{H}^p(\theta';\ 0)$, обращающейся в нуль в точках w_k [1]. *Для окончания доказательства теоремы достаточно* доказать представимость функции $G \in \boldsymbol{H}^p(\theta';\ 0)$ в виде (12), где функция $F \in H^p_\text{п}$. Это представление получаем из следствия 2 к теореме 2 и из того факта, что отображение $F(w) \to f(z) \stackrel{\text{df}}{=} F(e^z)$ устанавливает изоморфизм между пространством $\boldsymbol{H}^p(\alpha;\ 0)$ и пространством $H^p(-\alpha,\ \alpha;\ e^x)$, (определенным в § 1). Теорема доказана.

Аналогично получается теорема об интерполяции для последовательности функционалов $\{L_k\}$.

Теорема 4. *Пусть последовательность* $\{w_k\}_1^\infty$ *лежит в секторе* $|\arg w| < \theta'$ *и выполнено условие* (11). *Пусть функционалы* L_k *определены равенствами* (9). *Для того, чтобы для любой последовательности* $\{a_k\} \in l^p$ *нашлась функция* $F \in H^p_\text{п}$ *такая, что* $L_k[F] = a_k |w_k|^{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\theta'}-1\right)}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$0 < \inf \operatorname{Re} w_k^{\pi/2\theta'} \leqslant \sup \operatorname{Re} w_k^{\pi/2\theta'} < \infty \ \text{ и } \ \inf_{k \neq j} |w_k^{\pi/2\theta'} - w_j^{\pi/2\theta'}| > 0. \quad (13)$$

Для доказательства этой теоремы используются результаты об интерполяции в полуплоскости, полученные в [10].

Приведем теоремы о полноте и базисности, двойственные соответственно теоремам 3 и 4 о единственности и интерполяции.

---

[1] Используемые в этой и некоторых следующих теоремах результаты, относящиеся к интерполяции и единственности функций в угловых областях (и более общие результаты, допускающие кратные узлы), а также связанные с этими результатами утверждения о полноте и базисности получены в работе [7].

Теорема 3′. *Пусть последовательность точек* $\{w_k\}_1^\infty$ *расположена в секторе* $|\arg w| < \theta'$. *Для того, чтобы система функций*

$$\{(w+\bar{w}_k e^{-i\theta})^{-1} + (w+\bar{w}_k e^{i\theta})^{-1}\}_{k=1}^\infty \tag{14}$$

была неполна в H_+^p, *необходимо и достаточно выполнения условия* (11).

Отметим получающееся из этой теоремы при $p=2$ с помощью преобразования Фурье.

Следствие. *Для того, чтобы в условиях теоремы 3 система* $\{e^{-w_k e^{i\theta}t} - e^{-\bar{w}_k e^{-i\theta}t}\}_{k=1}^\infty$ (14′) *была неполна в* $L^2(0, \infty)$ *необходимо и достаточно выполнить соотношения* (11)[1].

Теорема 4′. *Чтобы в предположениях теоремы 3 система* (14) *была (после нормировки) базисом Рисса в замыкании своей линейной оболочки в* H_+^2, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{w_k\}$ *удовлетворяла условиям* (13).

Теоремы 3 и 4 и соответственно 3′ и 4′ допускают естественные обобщения, аналогичные обобщению теоремы 1 с заменой в формуле (9) линейных комбинаций значений функции F на интеграл по подходящей функции ограниченной вариации. Для краткости мы не будем приводить здесь полные формулировки.

§ 3. Разложение целых функций экспоненциального типа. В этом параграфе мы изучаем случай $p=2$. Пусть D треугольник с вершинами в точках 0, $-ae^{-i\theta}$, $-ae^{i\theta}$; $a>0$, $\theta \in (0, \pi/2)$, а $I=[-a, 0]$ — отрезок вещественной оси и $h_D(\varphi)$, $h_I(\varphi)$ — опорные функции этих множеств. Рассмотрим пространство L_D^2, состоящее из всех целых функций экспоненциального типа (ц. ф. э. т.) с нормой

$$\|F\|_{L_D^2}^2 = \sup_{0<\varphi<2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\rho e^{i\varphi})|^2 e^{-2\rho h_D(\varphi)} d\rho < \infty, \tag{15}$$

и, аналогично, пространство L_I^2[2]. По теореме Винера—Пэли пространство L_I^2 совпадает с пространством функций вида $G(w) = \int_0^a e^{-wt}\psi(t)\,dt$, $\psi \in L^2(0, a)$. Если функция $G \in L_I^2$, то, очевидно, функция $F(w) = G(we^{i\theta}) - G(we^{-i\theta})$ (16) принадлежит пространству L_D^2. Как описать все функции $F \in L_D^2$, допускающие такое представление? Следующая теорема дает в частных случаях ответ на этот вопрос.

---

[1] Система (14′) является в частном случае $w_k = k$ известной системой А. Г. Костюченко, исследованной в пространствах $L^p(0, l)$ в работах [11, 16].

[2] Пространства L_D^2 при произвольном выпуклом многоугольнике D были введены и изучены в [1, 17].

Теорема 5. *Пусть* $\theta = \pi/n$, $n \geqslant 3$ *натуральное число. Для того, чтобы* ц. ф. э. т. $F(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_F(k) z^k \in L_D^2$ *допускала представление* (16) *с функцией* $G \in L_I^2$ *необходимо и достаточно выполнение соотношений:* $c_F(nl) = 0$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ **(17).**

Доказательство. Необходимость условия (17) очевидна. Докажем достаточность. Целая $2i\pi$ — периодическая функция $f(z) \stackrel{\text{df}}{=} F(e^z)$ представима в виде $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_F(k) e^{kz}$.

Кроме того, рассматриваемая в полосе $|\operatorname{Im} z| < \theta'$ (здесь $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta\Big)$ функция $f(z)$ принадлежит пространству $H^2(-\theta', \theta'; e^x)$ и, следовательно, представима в виде: $f(z) = g(z + i\theta) - g(z - i\theta)$ (18), где $g(z) \in H^2\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; e^x\right)$. Функция $g(z)$ может быть продолжена до целой. В самом деле, перепишем (18) в виде $g(z + 2i\theta) = f(z + i\theta) - g(z)$ (18′).

В этом равенстве правая часть аналитична при $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}$, но тогда функция $g(z)$ аналитична при $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2} + 2\theta \ldots$ Повторяя эти рассуждения, мы докажем аналитичность функции $g(z)$ в верхней и, аналогично, в нижней полуплоскости. Из (18)′ и из условий теоремы следует $2i\pi$-периодичность функции $g(z)$:

$$g(z + 2i\pi) - g(z) = \sum_{j=0}^{n-1} [g(z + 2i(j+1)\theta) - g(z + 2ij\theta)] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} f(z + i(2j+1)\theta) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k \neq 0 (\operatorname{mod} n)} c_F(k) e^{kz + i(2j+1)k\theta} =$$

$$= \sum_{k \neq 0 (\operatorname{mod} n)} c_F(k) e^{kz + ik\theta} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i2kj} = 0.$$

Поэтому функция $G(w) = g(\ln w)$ аналитична в w-плоскости, за исключением быть может точки $w = 0$ и при всех значениях $w \neq 0$ имеет место представление (16). Осталось доказать устранимость особенности в нуле и то, что ц. ф. $G(w) \in L_I^2$. Оба эти утверждения следуют из неравенства[1]

$$\sup_{\varphi} \int_0^{\infty} |G(\rho e^{i\varphi})|^2 e^{-2\rho h_I(\varphi)} d\rho < \infty. \qquad (19)$$

$$\text{Имеем} \quad h_I(\varphi) = \begin{cases} 0, & -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \\ -a\cos\varphi, & \frac{\pi}{2} \leqslant |\varphi| \leqslant \pi \end{cases}; \qquad (20)$$

[1] Устранимость особенности в нуле следует в этом случае из интегрируемости функции $|G(w)^2|$ по площади в окрестности нуля.

$$h_D(\varphi) = \begin{cases} 0, \ |\varphi| \leqslant \theta' \\ -a\cos(\theta+\varphi), \ \theta' \leqslant \varphi \leqslant \pi. \\ -a\cos(\theta-\varphi), \ -\pi \leqslant \varphi \leqslant -\theta' \end{cases} \tag{21}$$

Поэтому после замены переменных $\rho = e^x$ неравенство (19) переходит в

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x+iy)|^2 e^x\, dx < \infty, \quad |y| < \frac{\pi}{2}; \tag{22А}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x+iy)|^2 e^{2a\cos y e^x} e^x\, dx < \infty, \quad \frac{\pi}{2} \leqslant |y| \leqslant \pi. \tag{22Б}$$

Первое из этих неравенств следует из включения $g \in H^2\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; e^x\right)$. Докажем второе. Предположим, что $y \in \left(\frac{\pi}{2}, \min\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta, \pi\right)\right)$. В этом случае $y - \theta \geqslant \theta'$ и в силу (15), (21) имеет место неравенство

$$\int_{\infty-}^{\infty} |f(x+i(y-\theta))|^2 e^{2a\cos y e^x} e^x\, dx < \infty. \tag{23}$$

Используем равенство (18′) в виде $g(z) = f(z - i\theta) - g(z - 2i\theta)$, откуда с учётом (22А) и (23) следует требуемое неравенство для $y \in \left(\frac{\pi}{2}, \min\left(\pi, \frac{\pi}{2} + 2\theta\right)\right)$. Если $\frac{\pi}{2} + 2\theta \geqslant \pi$, то доказательство окончено $\left(\text{рассуждение для } y \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \text{ аналогично}\right)$. Если же $\frac{\pi}{2} + 2\theta < \pi$, то надо повторить эти рассуждения для значений $y \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\theta, \min\left(\frac{\pi}{2} + 4\theta, \pi\right)\right)$, используя вместо (22А) уже доказанное для интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\theta\right)$ неравенство (22Б) и то, что при $y \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\theta, \min\left(\frac{\pi}{2} + 4\theta, \pi\right)\right)$ справедливо неравенство $-\cos y > -\cos(y - 2\theta)$. Этот процесс продолжается до исчерпания угла $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ и, аналогично, угла $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956. — 632 с. 2. *Стейн И.*, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973. — 340 с. 3. *Седлецкий А. М.*

Эквивалентное определение пространств в полуплоскости и некоторые приложения. — Мат. сб., 1975, 98, № 1, с. 75—82. 4. *Титчмарш Е.* Введение в теорию преобразования Фурье. — М. — Л.; Гостехиздат, 1948, — 479 с. 5. *Джрбашян М. М., Аветисян А. Е.* Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла. — Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 3, с. 457—460; Сиб. мат. журн., 1960, **1**, № 3, с. 383—426. 6. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представление функции в комплексной области. — М.: Наука. 1966. — 671 с. 7. *Мартиросян В. М.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях. — Изв. АН Арм. ССР, сер. Математика, 1978 г, **13**, № 5—6, с. 490—531; Докл. АН СССР, 1979, **245**, № 1, с. 24—27. 8. *Акопян С. А.* Теорема о двух постоянных для функций класса. — Изв. АН Арм. ССР, сер. Математика. 1967, **2**, № 2, с. 123—127. 9. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. — М.: ИЛ, 1963. — 311 с. 10. *Никольский Н. К.* Лекции об операторе сдвига. — М.: Наука, 1980. — 383 с. 11. *Левин Б. Я.* Целые функции. — М.: изд-во МГУ, 1971. — 98 с. 12. *Джавадов М. Г.* О полноте некоторой части собственных функций несамосопряженного оператора. — Докл. АН СССР, 1964, № 4, с. 723—725. 13 *Шкаликов А. А.* Об одной системе функций. — Мат. заметки, 1975, **18**. вып. 6, с. 855—870. 14. *Радзиевский Г. В.* Об одном методе доказательства полноты корневых векторов оператор-функций. — Докл. АН СССР, 1974, **214**, № 2, с. 291—294. 15. *Казьмин Ю. А.* О замыканиях линейных оболочек двух систем функций. — Докл. АН СССР, 1977, **236**, № 3, с. 535—537; Актуальные вопросы математического анализа, Ростов, Изд-во РГУ, 1978, с. 72—83. 16. *Тумаркин А. Г.* О полноте некоторых систем функций. — Функц. анализ и его прил., 1980, **14**, № 2, с. 81—82. 17. *Кацнельсон В. Э.* Обобщение теоремы Винера — Пэли о представлении целых функций конечной степени. — Теория функций, функц. анализ и их прил., 1965, вып. 1, с. 99—110.

Поступила в редколлегию 07.11.70.