УДК 517.521.8. *В. А. ЛОТОЦКИЙ*

ОБ УСЛОВИЯХ СОВПАДЕНИЯ ЯДЕР СРЕДНИХ ЧЕЗАРО И ПУАССОНА-АБЕЛЯ

Пусть $\{S_n\}$ — последовательность комплексных чисел и а) $R(S)$, б) $R_{C^{(\alpha)}}(S)$, в) $R_A(S)$, г) $R_{\|a_{nk}\|}(S)$ — ядра в смысле Кноппа [1, с. 161], соответственно, последовательностей (функций)

а) $\{S_n\}$; б) $\{C_n^{(\alpha)}\}$, где $C_n^{(\alpha)} = \frac{1}{E_n^{(\alpha)}} \sum\limits_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\alpha-1)} S_k$, $\alpha > 0$; $E_n^{(\alpha)} \equiv \equiv \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\,\ldots\,(\alpha+n)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; в) $f(x) = (1 - x) \sum\limits_{k=0}^{\infty} S_k x^k$ $(0 \leqslant x < 1)$; г) $\{t_n\}$, где $t_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и $\|a_{nk}\|$ — регулярная положительная матрица.

В работе [2] доказано следующее предложение, дающее необходимые и достаточные условия совпадения ядер $R(S)$ и $R_{\|a_{nk}\|}(S)$.

Теорема А. *Для того чтобы крайняя точка z_0 [3, с. 85] ядра $R(S)$ ограниченной последовательности $\{S_n\}$ принадлежала ядру $R_{\|a_{nk}\|}(S)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была $(\|a_{nk}\|, t)$ — точкой последовательности $\{S_n\}$.* Точка z_0 называется $(\|a_{nk}\|, t)$ — точкой последовательности $\{S_n\}$ [2, с. 537], если для любого $\varepsilon > 0$ существуют возрастающие последовательности $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ натуральных чисел такие, что $|S_{\nu_i} - z_0| < \xi$ $(i = 1, 2, \ldots)$, причем $\sum_{i=1}^{\infty} a_{m_k \nu_i} \to 1$ $(k \to \infty)$. Нетрудно убедиться, что для регулярной нижней треугольной положительной матрицы $A = \|a_{nk}\|$

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{p_{nk}}{P_n}, & \text{если } k \leqslant n, \\ 0, & \text{если } k > n, \end{cases}$$

где $p_{n0} > 0$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$, $p_{nk} \geqslant 0$ (n и $k = 0, 1, 2, \ldots$), $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_{nk} + O(1)$ $(n \to \infty)$ и $\lim_{n \to \infty} p_{nk/P_n} = 0$ для каждого фиксированного $k = 0, 1, 2, \ldots$, определение ($\|a_{nk}\|, t$) — точки эквивалентно следующему определению.

Точка z_0 называется ($\|a_{nk}\|, t$) — точкой последовательности $\{S_n\}$, если для произвольного $\varepsilon < 0$ найдутся последовательности $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ натуральных чисел такие, что $|S_{\nu_i(k)} - z_0| < \varepsilon$ для $n_k \leqslant \nu_i^{(k)} \leqslant m_k < n_{k+1}$, $i = 1, 2, \ldots, j_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, причем

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{P_{m_k}} \sum_{i=1}^{j_k} p_{m_k \nu_i^{(k)}} = 1.$$

Всюду в дальнейшем, когда речь будет идти об ($\|a_{nk}\|, t$)-точке, мы будем понимать ее в смысле только что данного определения.

Рассмотрим теперь метод Чезаро порядка $\alpha \geqslant 0$ суммирования рядов или $(C; \alpha)$-метод. Как известно, его матрица имеет вид нижней треугольной регулярной положительной матрицы с $p_{nk} \equiv E_{n-k}^{(\alpha-1)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ и $P_n = \sum_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\alpha-1)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы крайняя точка z_0 ядра $R(S)$* ограниченной последовательности $\{S_n\}$ *принадлежала ядру $R_{C(\alpha)}(S)$, необходимо и достаточно, чтобы точка z_0 была (t)-точкой этой последовательности* [4, с. 168].

Отметим, что для $\alpha \geqslant 1$ теорема 1 доказана в работе [2], а в случае $0 < \alpha < 1$ доказательство ее вытекает из теоремы A с учетом известных свойств биномиальных коэффициентов $E_n^{(\alpha)}$. В качестве простого следствия из теоремы 1 вытекает такое утверждение.

Следствие. *Если последовательность $\{S_n\}$ ограничена и $\alpha > 0$, то $R_{C(\alpha)}(S) = R(S)$ тогда и только тогда, когда каждая крайняя точка ядра $R(S)$ последовательности $\{S_n\}$ является (t)-точкой этой последовательности.*

Теорема 2. *Пусть для некоторого $\alpha \geqslant 0$ последовательность $\{S_n\}$ $C^{(\alpha)}$ — ограничена и для фиксированного $\delta > 0$ справедливо равенство $R_{C(\alpha+\delta)}(S) = R_{C(\alpha)}(S)$. Тогда $R_{C(\alpha)}(S) = R_A(S)$.*

Доказательство. Если $\delta = 1$, то теорема 2 доказана в работе [2]. Покажем справедливость ее и при $0 < \delta < 1$. Возможны два случая: 1) $\alpha = 0$; 2) $\alpha > 0$. В случае 1, используя следствие настоящей статьи, теорему 4 работы [4] и теорему Кноппа [1, с. 162], легко убеждаемся в справедливости доказываемой теоремы.

Рассмотрим случай 2). Так как [5, с. 131]

$$C_n^{(\alpha+\delta)} = \frac{1}{E_n^{(\alpha+\delta)}} \sum_{k=0}^{n} E_{n-k}^{(\delta-1)} E_k^{(\alpha)} C_k^{(\alpha)} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

то средние Чезаро порядка $\alpha+\delta$ есть преобразования средних Чезаро порядка α с помощью матрицы (нижней треугольной регулярной положительной) $\| p_{nk}/P_n \|$, где $p_{nk} \equiv E_{n-k}^{(\delta-1)} E_k^{(\alpha)}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$, а $P_n = E_n^{(\alpha+\delta)}$ $(n = 0, 1, 2, \ \ldots)$. Тогда по теореме А из того, что $R_{C^{(\alpha+\delta)}}(S) = R_{C^{(\alpha)}}(S)$ имеем: каждая крайняя точка n_0 ядра $R_{C^{(\alpha)}}(S)$ есть $(\| a_{nk} \|, t)$ — точкой последовательности $\{C_n^{(\alpha)}\}$, т. е. для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют последовательности $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ такие, что

$$|c_{\nu_i^{(k)}}^{(\alpha)} - z_0| < \varepsilon \text{ для } n_k \leqslant \nu_i^{(k)} \leqslant m_k < n_{k+1},\ i = 1, 2, \ldots, j_k\ (k=1,\ 2,\ \ldots), \tag{1}$$

причем

$$\frac{1}{E_{m_k}^{(\delta+\alpha)}} \sum_{i=1}^{s_k} E_{m_k-\nu_i^{(k)}}^{(\delta-1)} E_{\nu_i^{(k)}}^{(\alpha)} \to 1 \quad (k \to \infty). \tag{2}$$

Так как при $0 < \delta < 1$ $E_n^{(\delta)} < E_{n+1}^{(\delta)}$ и $E_n^{(\delta-1)} > E_{n+1}^{(\delta-1)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, то $\frac{1}{E_{m_k}^{(\alpha+\delta)}} \sum_{i=1}^{j_k} E_{m_k-\nu_i^{(k)}}^{(\delta-1)} E_{\nu_i^{(k)}}^{(\alpha)} \leqslant \frac{1}{E_{m_k}^{(\alpha+\delta)}} \sum_{i=m_k-j_k}^{m_k} E_{m_k-i}^{(\delta-1)} E_i^{(\alpha)} \leqslant 1.$ Отсюда и из (2) получаем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{E_{m_k}^{(\alpha+\delta)}} \sum_{i=m_k-j_k}^{m_k} E_{m_k-i}^{(\delta-1)} E_i^{(\alpha)} = 1. \tag{3}$$

Покажем, что из (3) вытекает равенство

$$\lim_{k\to\infty} j_k/m_k = 1. \tag{4}$$

Пусть это не так. Тогда, не умаляя общности, можем считать справедливым равенство $\lim\limits_{k\to\infty} j_k/m_k = \beta_1$, где $0 \leqslant \beta_1 < 1$. Отсюда для произвольного $\varepsilon_1 > 0$ $(\varepsilon_1 + \beta_1 < 1)$ имеем $\beta_1 - \varepsilon_1 < j_k/m_k < \beta_1 + \varepsilon_1$ $(k > k_0(\varepsilon_1))$. Следовательно, $m_k - j_k = m_k \left(1 - \frac{j_k}{m_k}\right) > m_k\beta \geqslant [\beta m_k]$, где $\beta \equiv 1-\beta_1-\varepsilon_1$ и $[\cdot]$ — знак целой части. Поэтому для $k > k_0(\varepsilon_1)$

$$\frac{1}{E_{m_k}^{(\alpha+\delta)}} \sum_{i=m_k-i_k}^{m_k} E_{m_k-i}^{(\delta-1)} E_i^{(\alpha)} \leqslant 1 - \frac{1}{E_{m_k}^{(\alpha+\delta)}} \sum_{i=0}^{[\beta m_k]} E_{m_k-i}^{(\delta-1)} E_i^{(\alpha)}$$

и, значит,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{E_{m_k}^{(\alpha+\delta)}} E_{m_k}^{(\delta-1)} E_{[\beta m_k]}^{(\alpha+1)} = 0. \tag{5}$$

С другой стороны, так как $E_n^{(\alpha)} \sim n^\alpha/\Gamma(\alpha+1)$ [6, с. 131], то

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{E_{m_k}^{(\alpha+\delta)}} E_{m_k}^{(\delta-1)} E_{[\beta m_k]}^{(\alpha+1)} = \frac{\Gamma(\alpha+\delta+1)}{\Gamma(\delta)\,\Gamma(\alpha+2)} \beta^{\alpha+1},$$

а это равенство противоречит (5). Таким образом, наше предположение неверно и, значит, равенство (4) справедливо. Тогда из (1) и (4) получаем, что z_0 будет (t)-точкой последовательности $\{C_n^{(\alpha)}\}$. По теореме 4 работы [4], учитывая ограниченность последовательности $\{C_n^{(\alpha)}\}$, имеем $R_{C(\alpha)}(S) = R_\varphi(S)$, где $R_\varphi(S)$ — ядро функции $\varphi(x) \equiv (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(\alpha)} x^k$, $0 \leqslant x < 1$. Так как $R\varphi(S) \subset R_{C(\alpha)}(S)$, то $R_\varphi(S) = R_{C(\alpha)}(S)$. Из работы [7] следует включение $R\varphi(S) \subset R_A(S)$, поэтому $R_{C(\alpha)}(S) \subset R_A(S)$. Отсюда в силу известного включения $R_A(S) \subset R_{C(\alpha)}(S)$ вытекает равенство $R_{C(\alpha)}(S) = R_A(S)$. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Кук Р*. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей.— М.: Физматгиз, 1960.— 472 с. 2. *Давыдов Н. А., Михалин Г. А*. О ядрах ограниченных последовательностей.— Мат. заметки, 1978, **23**, № 4, с. 537—550. 3. *Рудин У*. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1975.— 443 с. 4. *Давыдов Н. А*. О границах неопределенности при суммировании ряда методами Чезаро и Пуассона — Абеля. Усп. мат. наук, 1957, **12**, вып. 4 (76), с. 167—174. 5. *Харди Г*. Расходящиеся ряды.— М.: ИЛ, 1951.—504 с. 6. *Зигмунд А*. Тригонометрические ряды, т. 1,— М.: Мир, 1965.—615 с. 7. *Borwein D*. A logaritmic method of summability.— J. London math. Soc., 1958, 33, № 2, p. 212—220.

Поступила в редколлегию 01.06.77.