УДК 517.53 *И. С. КАЦ*

СВЯЗИ МЕЖДУ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ РОСТА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИХ НУЛЕЙ

1. В настоящей статье мы придерживаемся терминологии и обозначений, принятых в монографии [1] Б. Я. Левина.

Для интегральных оценок роста целых функций и распределения их нулей будем использовать класс (W) вещественных функций вещественной переменной. Функцию $\xi(r)$ $(1 \leqslant r < +\infty)$ мы относим к этому классу, если 1) $\xi(r) \geqslant 0$, $\forall r \in [1, +\infty)$, 2) $\xi(r)$ выпукла вверх на $[1, +\infty)$, 3) правая производная $\xi^{+}(1)$

функции $\xi(r)$ в точке $r=1$ конечна, 4) $\xi(r)=0(r)$ при $r\to+\infty$. Из требований 2), 3) вытекает, что функция $\xi(r)\in(W)$ абсолютно непрерывна на $[1, +\infty)$, имеет в каждой точке $r\in[1, +\infty)$ конечную правую производную $\xi^+(r)$, которая не возрастает на $[1, +\infty)$ и всюду, кроме, быть может, счетного множества точек, совпадает с левой производной $\xi^-(r)$ ([2], гл. I, § 10). Теперь для $\xi(r)\in(W)$ из 1) вытекает, что $\xi^+(r)\geqslant 0$, $\forall r\in[1, +\infty)$, и поэтому $\xi(r)$ не убывает на $[1, +\infty)$, а из 4) следует, что $\xi^+(r)\to 0$ при $r\to+\infty$.

Нами часто будет применяться символ «$\Diamond$», который, будучи поставленным между двумя несобственными интегралами Римана — Стильтьеса неотрицательных функций по отношению к неубывающим функциям, означает у нас, что из сходимости одного из этих интегралов вытекает сходимость другого.

Основные результаты статьи составляют следующие две теоремы.

Теорема А. *Пусть целая функция* $f(r)$ *представима в виде*

$$f(z)=\prod_{1}^{\omega} G(z/a_n;\ p)\quad (\omega\leqslant\infty), \tag{1}$$

где $G(u,\ p)$ *первичный множитель и*

$$\sum_{n=1}^{\omega} |a_n|^{-p-1}<\infty,\ p+1\in N, \tag{2}$$

а $\xi(r)\in(W)$. Тогда из сходимости интеграла

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{n_f(r)}{r^{p+2}}\,\xi(r)\,dr \tag{3}$$

вытекает сходимость интеграла

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln M_f(r)}{r^p}\,d(-\xi^+(r)). \tag{4}$$

Теорема В. *При условиях предыдущей теоремы, если к тому же корни* $a_n=|a_n|e^{i\alpha_n}$ *функции* $f(z)$ *расположены так, что при некоторых вещественных* $\eta>0$ *и* θ *выполняются неравенства*

$$\cos(p(\theta-\alpha_n))\geqslant\eta;\ \cos((p+1)(\theta-\alpha_n))\leqslant-\eta\quad(n=1,\ 2,\ \ldots), \tag{5}$$

то из сходимости интеграла (4) *вытекает сходимость интеграла* (3) *и, следовательно,*

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{n_f(r)}{r^{p+2}}\,\xi(r)\,dr\ \Diamond\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln M_f(r)}{r^p}\,d(-\xi^+(r)). \tag{6}$$

Заметим, что дополнительные условия теоремы В выполняются, в частности, когда все корни функции $f(z)$ принадлежат углу $\theta_1\leqslant\arg z\leqslant\theta_2$ такому, что $\theta_2-\theta_1<\dfrac{\pi}{2(p+1)}$.

Теорема A и B обобщаются нами на произвольную целую функцию конечного рода p (см. п. 4). По-видимому, впервые результат, связывающий интегральные характеристики роста целой функции и распределения ее нулей был получен Г. Валироном (1923 г.). Согласно этому результату [1, с. 495—497], если $\rho(r)$ — уточненный порядок с нецелым $\rho = \lim\limits_{r\to+\infty} \rho(r) > 0$, а $f(z)$ — целая функция, то

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho(r)+1}}\, dr \diamondsuit \int\limits_1^{+\infty} \frac{n_f(r)}{r^{\rho(r)+1}}\, dr. \qquad (7)$$

Эта теорема была нами сравнительно недавно (см. [3]) обобщена: фигурирующая в (7) функция $r^{-\rho(r)-1}$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок, была заменена функцией значительно более широкого класса. Обобщенная теорема A «перекрывает» в одном направлении наш результат из [3] и, следовательно, теорему Валирона. Что же касается теоремы B, то она является обобщением этих результатов в соответствующем направлении лишь для некоторого класса целых функций, удовлетворяющих налагаемым в теореме B *условиям на расположение нулей. Для того, чтобы «компенсировать этот недостаток»* мы приводим здесь теорему C (п. 5).

2. В том частном случае, когда $\omega = 0$, мы считаем по определению, что в (1) $f(z) \equiv 1$. В этом случае утверждения теорем A и B тривиальны. Поэтому доказательство достаточно проводить лишь при $\omega > 0$.

Как известно ([1], лемма 3, с. 22), при условиях теоремы A $r^{-p}\ln M_f(r) < k\mu_f(r)$ $(0 < r < +\infty)$ **(8)**, где $k = k_p < \infty$ — вещественная константа, а

$$\mu_f(r) = \int\limits_1^{r} \frac{n_f(t)}{t^{p+1}}\, dt + r\int\limits_r^{+\infty} \frac{n_f(t)}{t^{p+2}}\, dt \quad (0 < r < +\infty), \qquad (9)$$

причем функция $\mu_f(r)$ конечна при всех $r \in (0, +\infty)$ ([1], с. 20, доказательство леммы 1).

В силу сказанного, теорема A будет установлена, как только будет доказана ***Лемма 1****. Для любой функции* $\xi(r) \in (W)$

$$\int\limits_1^{+\infty} \mu_f(r)\, d(-\xi^+(r)) \diamondsuit \int\limits_1^{+\infty} \frac{n_f(r)}{r^{p+2}}\, \xi(r)\, dr. \qquad (10)$$

Для ее доказательства мы воспользуемся следующим хорошо известным вспомогательным предложением (см., напр. [4], лемма 2).

Лемма L*. Если* $\omega(x) \geqslant 0$ *— функция, неубывающая на* $[a, +\infty)$*, а* $\sigma(x) \geqslant 0$ *— невозрастающая на том же интервале функция,* *причем* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma(x)=0$ *и хотя бы одна из функций* $\omega(x)$ *и* $\sigma(x)$ *непрерывна на* $[a, +\infty)$, *то*

$$\int\limits_a^{+\infty}\sigma(x)\,d\omega(x)\diamond\int\limits_a^{+\infty}\omega(x)\,d(-\sigma(x)). \tag{11}$$

Доказательство леммы 1. Заметим, что функция $\mu_f(r)$, определенная равенством (9), абсолютно непрерывна и во всех точках непрерывности функций $n_f(r)$, т. е. при $r\neq|a_n|$ $(n=1, 2, \ldots)$[1]

$$(\mu_f(r))'=\int\limits_r^{+\infty}\frac{n_f(t)}{t^{p+2}}\,dt>0. \tag{12}$$

Поэтому, согласно лемме L, для $\xi(r)\in(W)$

$$\int\limits_1^{+\infty}\mu_f(r)\,d(-\xi^+(r))\diamond\int\limits_1^{+\infty}(\xi^+(r)\int\limits_r^{+\infty}\frac{n_f(t)}{t^{p+2}}\,dt)\,dr. \tag{13}$$

Применив еще раз лемму L, получим, что

$$\int\limits_1^{+\infty}(\xi^+(r)\int\limits_1^{+\infty}\frac{n_f(t)}{t^{p+2}}\,dt)\,dr\diamond\int\limits_1^{+\infty}\frac{\xi(r)\,n_f(r)}{r^{p+2}}\,dr. \tag{14}$$

Из (13) и (14) вытекает (10). Этим доказана лемма 1, а с ней и теорема А.

3. В силу леммы 1, для доказательства теоремы B достаточно установить, что при условиях этой теоремы существует константа $q=q(\eta)>0$ такая, что $r^{-p}\ln M_f(r)\geqslant q\mu_f(r)$ $(0<r<+\infty)$. **(15)**

Рассмотрим сначала один первичный множитель

$$G(z/a_n;\ p)=G(z/|a_n|\,e^{i\alpha_n};\ p). \tag{16}$$

Лемма 2. *Если вещественные числа* θ *и* α_n *таковы, что* $\cos(p(\theta-\alpha_n))\geqslant\eta$; $\cos((p+1)(\theta-\alpha_n))\leqslant-\eta$ **(17)**, *где* $\eta>0$, *то при* $r>0$, $|a_n|\neq0$

$$\operatorname{Re}\ln G\left(\frac{re^{i\theta}}{|a_n|\,e^{i\alpha_n}};\ p\right)\geqslant\eta r^{p+1}\int\limits_{|a_n|}^{+\infty}\frac{dt}{t^{p+1}(t+r)}. \tag{18}$$

Доказательство. Как хорошо известно ([5], с. 92, равенства (5.1) и (5.1′)), если $b>0$, $z=re^{i\varphi}$ $(r>0,\ \operatorname{Im}\varphi=0)$, где $\varphi\neq0\pmod{2\pi}$, то

$$\operatorname{Re}\ln G\left(\frac{z}{b};\ p\right)=\operatorname{Re}\left(z^{p+1}\int\limits_b^{+\infty}\frac{dt}{t^{p+1}(z-t)}\right). \tag{19}$$

[1] Более того, это верно и при $r=|a_n|$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Так как при указанных значениях z и при $t > 0$

$$\operatorname{Re}\frac{z^{p+1}}{z-t} = r^{p+1}\,\frac{r\cos p\varphi - t\cos(p+1)\varphi}{|z-t|^2}, \tag{20}$$

то, в силу (19),

$$\operatorname{Re}\ln G\left(\frac{z}{b};\ p\right) = r^{p+1}\int\limits_{b}^{+\infty}\frac{r\cos p\varphi - t\cos(p+1)\varphi}{t^{p+1}\,|z-t|^2}\,dt. \tag{21}$$

Согласно второму неравенству (17), $\theta \neq \alpha_n \pmod{2\pi}$. Поэтому из (21) вытекает, что

$$\operatorname{Re}\ln G\left(\frac{re^{i\theta}}{|a_n|\,e^{i\alpha_n}};\ p\right) =$$

$$= r^{p+1}\int\limits_{|a_n|}^{+\infty}\frac{r\cos(p(\theta-\alpha_3)) - t\cos((p+1)(\theta-\alpha_n))}{t^{p+1}\,|z-t|^2}\,dt \tag{22}$$

и, как следует из неравенств (17),

$$\operatorname{Re}\ln G\left(\frac{re^{i\theta}}{|a_n|\,e^{i\alpha_n}};\ p\right) \geqslant \eta r^{p+1}\int\limits_{|a_n|}^{+\infty}\frac{r+t}{t^{p+1}\,|z-t|^2}\,dt. \tag{23}$$

Отсюда получаем (18).

Лемма 3. *При условиях теоремы В*

$$r^{-p}\ln|f(re^{i\theta})| \geqslant \frac{\eta}{2}\,\mu_f(r)\ (0 < r < +\infty) \tag{24}.$$

Доказательство. Из (1) и леммы 2 вытекает, что

$$\ln|f(re^{i\theta})| = \sum_{n=1}^{\omega}\ln\left|G\left(\frac{re^{i\theta}}{a_n};\ p\right)\right| = \sum_{n=1}^{\omega}\operatorname{Re}\ln G\left(\frac{re^{i\theta}}{a_n};\ p\right) \geqslant$$

$$\geqslant \eta r^{p+1}\sum_{n=1}^{\omega}\int\limits_{|a_n|}^{+\infty}\frac{dt}{t^{p+1}(t+r)} = \eta r^{p+1}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{n_f(t)\,dt}{t^{p+1}(t+r)}. \tag{25}$$

Далее,

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{n_f(t)\,dt}{t^{p+1}(t+r)} = \int\limits_{0}^{r}\frac{n_f(t)\,dt}{t^{p+1}(t+r)} + \int\limits_{r}^{+\infty}\frac{n_f(t)\,dt}{t^{p+1}(t+r)}; \tag{26}$$

$$\int\limits_{0}^{r}\frac{n_f(t)\,dt}{t^{p+1}(t+r)} \geqslant \frac{1}{2r}\int\limits_{0}^{r}\frac{n_f(t)}{t^{p+1}}\,dt; \tag{27}$$

$$\int\limits_{r}^{+\infty}\frac{n_f(t)\,dt}{t^{p+1}(t+r)} \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{r}^{+\infty}\frac{n_f(t)\,dt}{t^{p+2}}. \tag{28}$$

Из (9), (25) — (28) следует (24). Лемма доказана.

Из леммы тривиальным образом следует, что при условиях теоремы B справедливо неравенство (15) с $q = \frac{\eta}{2} > 0$. Этим, как уже отмечалось, доказана теорема B.

4. Утверждение теоремы A остается верным и для целых функций $f(z)$, представимых в виде $f(z) = z^m e^{P(z)} \prod_{n=1}^{\omega} G\left(\frac{z}{a_n}; p\right)$ (29), где m — кратность нулевого корня, а $P(z) = \sum_{j=0}^{p} b_j z^j$ (30), если, конечно, выполняется условие (2), т. е. для любых целых функций $f(z) \not\equiv 0$, род которых не превышает p.

Это очевидно, ибо для любой функции $\xi(r) \in (W)$, согласно лемме L и приведенным в п. 1 свойствам функций класса (W), $\xi(r) = 0(r)$ при $r \to +\infty$;

$$\int_1^{+\infty} d(-\xi^+(r)) = \xi^+(1) < \infty; \qquad (31)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\xi(r)}{r^2} dr \diamondsuit \int_1^{+\infty} \frac{1}{r} \xi^+(r)\, dr \diamondsuit \int_1^{+\infty} \ln r d(-\xi^+(r)). \qquad (32)$$

Теорема B также обобщается на этот класс функций. Более того, достаточно потребовать, чтобы неравен тва (5) выполнялись лишь начиная с $n = N > 1$. Заметим, что это обобщение (как и сама теорема B) тривиально, когда $\omega < \infty$, т. е. когда $n_f(r)$ ограничена. В самом деле, при $p > 0$ сходимость интеграла (3) вытекает из того, что $\xi(r) = 0(r)$ при $r \to +\infty$, а при $p = 0$ она немедленно вытекает из (32) и сходимости интеграла (4)[1]).

Докажем обобщение теоремы B при $\omega = \infty$.

При указанных условиях функция (29) представима в виде $f(z) = R(z) e^{Q(z)} g(z)$ (33), где $R(z)$ — полином степени $m + N - 1$, $Q(z)$ — полином, степень которого не превышает p, а $g(z) = \prod_{n=N}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}; p\right)$ (34) — целая функция, удовлетворяющая условиям теоремы B. Согласно (33), $\ln M_f(r) \geqslant \ln|f(re^{i\theta})| = \ln|R(re^{i\theta})| + \operatorname{Re} Q(re^{i\theta}) + \ln|g(re^{i\theta})|$. Поэтому (см. лемму 3) $0 \leqslant \ln|g(re^{i\theta})| \leqslant \ln M_f(r) + |Q(re^{i\theta})| + |\ln|R(re^{i\theta})||$. Если сходится интеграл (4) с $\xi(r) \in (W)$, то из последнего неравенства получаем с учетом (31) и (32), что сходится[1] интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln|g(re^{i\theta})|}{r^p} d(-\xi^+(r)).$$

---

1) Если у функции $f(z)$ имеется хотя бы один корень, то $M_f(r)$ растет не медленнее, чем r, и из сходимости интеграла (4) при $p = 0$ вытекает сходимость последнего интеграла в (32).

Отсюда, согласно леммам 3 и 1, вытекает сходимость интеграла (3) с g вместо f и, следовательно, самого интеграла (3) (при больших r $n_f(r) \leqslant 2n_g(r)$).

5. **Теорема С.** *Если* $\xi(t)$ $(1 \leqslant t < +\infty)$ — *невозрастающая положительная функция такая, что*

$\int\limits_1^{+\infty} \xi(t)\,dt < \infty$ **(35)** *и* $\inf\limits_{t \geqslant 1} \dfrac{\xi(2t)}{\xi(t)} > 0$ **(36)**, *то для любой целой функции* $f(z)$ *с корнями* a_1, a_2, ... *из сходимости интеграла* $\int\limits_1^{+\infty} \ln M_f(r)\,\xi(r)\,dr$ (37) *вытекает, что*

$$\int\limits_1^{+\infty} n_f(r)\,\xi(r)\,dr < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{|a_n|>1} |a_n|\,\xi(|a_n|) < \infty. \tag{38}$$

Доказательство. Будем исходить из неравенства

$$\int\limits_1^{r} \frac{n_f(t)}{t}\,dt \leqslant \ln M_f(r) + K, \tag{39}$$

где $K = -\ln \dfrac{|f^{(m)}(0)|}{m!}$ а, m — кратность корня, расположенного в точке $z=0$; при $m=0$ $K = -\ln|f(0)|$. Это неравенство тривиально следует из равенства, приведенного в [1] на с. 25.

В силу (35) и (39),

$$\left(\int\limits_1^{+\infty} \ln M_f(r)\,\xi(r)\,dr < \infty\right) \Rightarrow \left(\int\limits_1^{+\infty}\left(\int\limits_1^{r} \frac{n_f(t)}{t}\,dt\right)\xi(r)\,dr < \infty\right). \tag{40}$$

Согласно лемме L и условию (35),

$$\int\limits_1^{+\infty}\left(\int\limits_1^{r} \frac{n_f(t)}{t}\,dt\right)\xi(r)\,dr \Diamond \int\limits_1^{+\infty}\left(\int\limits_r^{+\infty} \xi(s)\,ds\right)\frac{n_f(r)}{r}\,dr. \tag{41}$$

Так как $\xi(t)$ (>0) — невозрастающая функция, то при любом $r \geqslant 1$

$$\int\limits_r^{+\infty} \xi(s)\,ds > \int\limits_r^{2r} \xi(s)\,ds \geqslant r\xi(2r) > r\xi(r)\,K_\xi, \tag{42}$$

где $K_\xi = \inf\limits_{t \geqslant 1} \dfrac{\xi(2r)}{\xi(r)} > 0$ (см. (36)). Поэтому

$$\int\limits_1^{+\infty}\left(\int\limits_r^{+\infty} \xi(s)\,ds\right)\frac{n_f(r)}{r}\,dr \geqslant K_\xi \int\limits_1^{+\infty} n_f(r)\,\xi(r)\,dr. \tag{43}$$

Согласно (35), лемме L и (42),

$$\int_{1}^{+\infty} n_f(r)\,\xi(r)\,dr \Diamond \int_{1}^{+\infty} \left(\int_{r}^{+\infty} \xi(s)\,ds\right) dn_f(r) \geqslant$$

$$\geqslant K\xi \int_{1}^{+\infty} r\xi(r)\,dn_f(r) = K\xi \sum_{|a_n|\geqslant 1} |a_n|\,\xi(|a_n|). \tag{44}$$

Так как $K\xi > 0$, то из (40), (41), (43) и (44) получаем утверждения теоремы.

Список литературы; 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М.: Гостехиздат, 1956.— 632 с. 2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды, Т. 1.— М.: Мир, 1965,— 615 с. 3. *Кац И. С.* Обобщение классических теорем о связи между ростом целых функций и распределением их нулей.— В кн.: Всесоюз. конф. по теории функций комплексного переменного. Харьков, апрель, 1971, Ротапринт. 4. *Кац И. С.* Существование спектральных функций обобщенных дифференциальных систем второго порядка с граничными условиями в сингулярном конце.— Мат. сб., 1965, 68, вып. 110, № 2, с. 174—227. 5. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.—592 с.

Поступила в редколлегию 01.11.80.