УДК 517.948:513+519.4

В. А. ЗОЛОТАРЕВ

ТРЕУГОЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ НЕПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Назовем систему линейных, ограниченных операторов A_1, A_2, действующую в гильбертовом пространстве H, принадлежащей классу $K_{n,\,m}$, если:

1) $\dim CH = n < \infty$, $\dim DH = m < \infty$, $C = A_1^* A_2 - A_2 A_1^*$, $D = A_1 A_2 - A_2 A_1$; 2) $C^{n+1} = 0$, $C^n \neq 0$, $D^{m+1} = 0$, $D^m \neq 0$; 3) для любого $k\,(0 \leqslant k \leqslant n)$ существует $s\,(0 \leqslant s \leqslant m)$, такое, что имеют место включения $DC^kH \subset D^sH$, $CD^sH \subset C^{k+1}H$, $DC^{k+1}H \subset D^{s+1}H$; 4) и, наконец, $CD^* = 0$, $D^*|_{CH} \neq 0$ либо $C^*|_{DH} \neq 0$.

Оператор A в гильбертовом пространстве H называется вполне несамосопряженным [1, 2], если $H = \bigvee_{m \geqslant 0} A^m H_0$, $H_0 = \overline{A_I H}$, $A_I = \frac{1}{2i}(A - A^*)$.

2. Рассмотрим следующий важный пример системы линейных операторов $\mathring{A}_1$, $\mathring{A}_2$ в $L^2(D)$ из класса $K_{1,1}$. Пусть $D = \{(x_1, x_2) : 0 \leqslant x_1 < a_1$ при $0 \leqslant x_2 \leqslant b_1$; $a_1 \leqslant x_1 \leqslant a_2$ при $0 \leqslant x_2 \leqslant b_3$;

$a_2 < x_1 < a_3$ при $0 \leqslant x_2 \leqslant b_2\}$, $a_3 > a_2 > a_1$, $b_3 > b_2 > b_1$. Определим пространство измеримых по мере $dx = dx_1 dx_2$ на D функций

$$L^2(D) = \{f(x),\ x = (x_1,\ x_2) \in D : \int_D |f(x)|^2 dx < \infty\} \tag{1}$$

и два оператора, действующие в $L^2(D)$:

$$\begin{aligned} (\mathring{A}_1 f)(x) &= \alpha_1(x_1) f(x) + i \int_0^{x_1} f(t,\ x_2) J_1 dt; \\ (\mathring{A}_2 f)(x) &= \alpha_2(x_2) f(x) + i \int_0^{x_2} f(x_1,\ t) J_2 dt; \end{aligned} \tag{2}$$

$x = (x_1,\ x_2) \in D$, $f(x) \in L^2(D)$, а $\alpha_k(x_k)$ — вещественные неубывающие, ограниченные функции, $J_k = \pm 1$ $(k = 1,\ 2)$.

Нетрудно убедиться, что система операторов $\mathring{A}_1$, $\mathring{A}_2$ принадлежит классу $K_{1,1}$, причем в данном случае $k = 0$ соответствует $s = 0$ (см. п. 3 определения $K_{n,m}$). Если $b_1 > b_2$, то $k = 1$ отвечает $s = 1$; когда же $b_1 = b_2$, имеет место $CD = DC = 0$.

3. Рассмотрим для определенности тот случай, когда $k = 0$ соответствует $s = 0$.

Введем в рассмотрение оператор $B = \frac{1}{2i}(D - C)$. Тогда в случае систем класса $K_{1,1}$ имеет место $B^3 = 0$.

Теорема 1. *Пусть система операторов A_1, A_2, каждый из которых вполне несамосопряжен, принадлежит классу $K_{1,1}$ и обладает свойствами: 1) спектр A_1 и A_2 вещественен;* 2) $\dim((\overline{(A_1)_I H} \cap \overline{(A_2)_I H}) = 1$; 3) $(A_1)_I B^k H \subset B^k H$, $(A_2)_I B^{*s} H \subset B^{*s} H$ $(0 < k,\ s < 3)$, *причем $(A_1)_I$ на BH, $(A_2)_I$ на B^*H невырождены.*

Тогда существует пространство $L_2(D)$ и $\mathring{A}_1$, $\mathring{A}_2$ (см. (1), (2)), а также изометрический оператор U, отображающий H в $L^2(D)$, такие, что $UA_k = \mathring{A}_k U$ $k = (1,\ 2)$.

Заметим, что для систем класса $K_{0,0}$ эта теорема получена в [2], а для систем из $K_{n,0}$ — в [3].

Условие 1 теоремы 1 не является существенным, его можно избежать, рассмотрев соответствующую модификацию многомерной треугольной модели (1), (2) (см. [2]).

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из следующей теоремы и результатов, полученных в [3].

Теорема 2. *Пусть система операторов A_1, A, каждый из которых вполне несамосопряжен, принадлежит классу $K_{1,1}$ и обладает свойствами:* 1) $\dim((\overline{(A_1)_I H} \cap \overline{(A_2)_I H}) = 1$; 2) $(A_1)_I B^k H \subset B^k H$, $(A_2)_I B^{*s} H \subset B^{*s} H$ $(0 < k,\ s < 3)$, *причем $(A_1)_I$ на BH и $(A_2)_I$ на B^*H невырождены.*

Тогда пространство H можно разложить в ортогональную сумму подпространств $H = H_1 \oplus H'$ так, что сужение системы A_1, A_2 на H_1 принадлежит классу $K_{0,0}$ а на H' — принадлежит $K_{0,1}$ либо $K_{1,0}$, причем подпространство H_1 приводит оператор A_1 и инвариантно относительно A_2.

Из теоремы 2 следует, что системы операторов класса $K_{1,1}$ «распадаются» на системы из класса $K_{0,0}$ и $K_{0,1}$ (либо $K_{1,0}$). А системы класса $K_{0,1}$ (либо $K_{1,0}$), в свою очередь, «распадаются» на системы из класса $K_{0,0}$ (см. [3]). Следовательно, класс систем операторов $K_{1,1}$ может быть получен из систем дважды перестановочных операторов [2] (т. е. систем из $K_{0,0}$), которые «сцеплены» специальным образом. Система же модельных операторов из $K_{0,0}$ имеет вид (2), которые действуют в $L^2(D)$, где область D является прямоугольником.

Идея доказательства теоремы 2 состоит в следующем.

Рассмотрим подпространства $L_2 = \bigvee_{m\geqslant 0} A_2^m B^2 H$, $S = \bigvee_{m\geqslant 0} A_1^m C^* H$, $S' = \bigvee_{m\geqslant 0} A_1^{*m} D^* H$.

Имеет место

Лемма 1. *Пусть система операторов A_1, A_2 удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда подпространство L_2 инвариантно относительно $(A_1)_I$, причем $(A_1)_I|_{L_2} = \lambda_0 I$ $(\lambda_0 \neq 0)$.*

Имеют место включения $S \ominus C^*H \subset \operatorname{Ker}(A_1)_I$, $S' \ominus D^*H \subset \operatorname{Ker}(A_1)_I$.

Отсюда и из свойств систем операторов класса $K_{1,1}$ следует, что $L_2 \perp S$, $L_2 \perp S'$. Поэтому для систем операторов A_1, A_2, удовлетворяющих предположениям теоремы 2, подпространство $H_1 = \bigvee_{m_1, m_2 \geqslant 0} A_1^{m_1} A_2^{m_2} B^2 H$ искомое, т. е. $H_1 \subset \operatorname{Ker} C$ $H_1 \subset \operatorname{Ker} D$ и H_1 приводит оператор A_1.

Из теорем 1 и 2 следует, что конфигурация области D на плоскости $\boldsymbol{C}$ определяет алгебраические свойства системы операторов A_1, A_2 в $L^2(D)$ (см. (1), (2)), и, наоборот, заданные свойства коммутаторов C и D системы A_1, A_2 класса $K_{1,1}$ предопределяют геометрический вид области D для модельных систем операторов в $L^2(D)$.

Аналогичные теоремы могут быть получены и в случае систем операторов класса $K_{n,m}$.

Список литературы: 1. *Лившиц М. С.* и *Янцевич А. А.* Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Харьков, Изд-во ХГУ, 1971. 160 с. 2. *Золотарев В. А.* О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов.—ДАН Арм. ССР, XII, № 3, 1976, с. 136—140. 3. *Золотарев В. А.* О треугольных моделях систем одного класса перестановочных операторов. Рукопись депонирована в ВИНИТИ от 27.09.76 № 3433—76 Деп. 1976.

Поступила 29 августа 1975 г