УДК 517.5

М. Я. ЖИТОМИРСКИЙ

О КОНЕЧНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ ФОРМАЛЬНЫХ РЯДОВ

П. 1. В данной статье показана конечная определенность формальных отображений относительно действия некоторой подгруппы группы контактных преобразований в терминах свойств линейного приближения отображения.

Пусть K обозначает поле комплексных или вещественных чисел. Обозначим через $K[n, p]$ пространство формальных отображений $F: K^n \to K^p$, переводящих 0 в 0, которые можно рассматривать как p-компонентные формальные степенные ряды с коэффициентами из K. В пространстве $K[n, p]$ действует группа контактных преобразований $G[n, p]$, элементами которой служат преобразования в $K^n \times K^p$: $G[n, p] = \{\Phi(x, y) = (\Phi_1(x), \Phi_2(x, y)), \Phi'(0) = 0, \quad \Phi(0) = 0, \Phi_2(x, 0) = 0\}$; $\Phi. F = \Phi_2(\Phi_1^{-1}, \quad F(\Phi_1^{-1}))$, $(F \in K[n, p], \ \Phi \in G[n, p])$.

Алгеброй Ли группы $G[n, p]$ является алгебра формальных векторных полей в $K^n \times K^p$ вида $\lambda(x, y) = (\varphi(x), \psi(x, y))$, $\psi(x, 0) = 0$ без линейных и свободных членов.

Пусть G — некоторая подгруппа $G[n, p]$, $L[G]$ — алгебра Ли группы G. Для любых $\lambda \in L[G]$, $F \in K[n, p]$ справедливо разложение $\exp\lambda. F = F + S(F)\lambda + R(F)\lambda$ **(1)**, где оператор $S(F)$ — производная в единице группы G отображения $g \to g. F$ при фиксированном F, $R(F)$ — нелинейное по λ отображение; $\exp: L[G] \to G$ — экспоненциальное отображение.

Примем следующие обозначения. Пусть $K_i[n, p]$ — подпространство таких рядов из $K[n, p]$, каждая координата которых есть полином степени не выше i. Пусть P_i — естественные проекторы $K[n, p] \to K_i[n, p]$; $P^{(i)} = P_i - P_{i-1}$; $K^{(i)}[n, p] = P^{(i)}K[n, p]$; $F_i = P_i F$; $F^{(i)} = P^{(i)} F$ $(F \in K[n, p])$.

Аналогичным образом введем подпространства $L_i[G]$ и $L^{(i)}[G]$, проекторы Q_i и $Q^{(i)}$, обозначения λ_i и $\lambda^{(i)}$ $(\lambda \in L[G])$.

Отображение $P_i F(Q_i\lambda)$ называется i-струей отображения $F(\lambda)$ $(F \in K[n, p], \ \lambda \in L[G])$.

Линейный оператор $S(F)$ действует в $L[G]$ следующим образом $S(F)\lambda = F'\varphi + \psi(x, F)$ $(\lambda = \varphi(x), \quad \psi(x, y))$. Отсюда легко заключить, что оператор $S(F)$ обладает свойствами: если $P_i F = 0$, $Q_j\lambda = 0$, то $P_{i+j} S(F)\lambda = 0$ **(2)**; если $F = P_1 F$, $\lambda \in L^{(i)}[G]$, то $S(F)\lambda \in K^{(i)}[n, p]$ **(3)**.

П. 2. Справедливо утверждение [2]: пусть $F \in K[n, p]$. Существует ряд $H \in K[n, p]$ эквивалентный F относительно действия группы G и такой, что $H_1 = F_1$, $H^{(i)} \in \operatorname{Ker} L^*(F, i)$ $(i \geqslant 2)$, где операторы $L(F, i)$ $(i \geqslant 2)$ определяются как ограничение оператора $S(P_1 F)$ на $L^{(i)}[G]$. В силу свойства (3) $L(F, i): L^{(i)}[G] \to K^{(i)}[n, p]$.

Отображение H имеет так называемую неполную нормальную форму относительно действия группы G. С ее помощью можно определить целочисленный инвариант ряда.

Лемма. Пусть $H, F \in K[n, p]$ и имеют неполную нормальную форму. Пусть $P_{i-1}H - P_1H = P_{j-1}F - P_1F = 0$, $P^{(i)}H \neq 0$, $P^{(j)}F \neq 0$. Если ряды H и F эквивалентны, то $i = j$, $P^{(i)}H = P^{(j)}F$.

Доказательство. Поскольку $P_{i-1}H - P_1H = P_{j-1}F - P_1F = 0$, $P^{(i)}H \in \operatorname{Ker} L^*(H, i)$, $P^{(j)}F \in \operatorname{Ker} L^*(F, j)$, то мы можем заключить, что $Q_iS^*(H_{i-1})\,(H^{(i)}) = Q_iS^*(H_{i-1})\,v_1$; $Q_jS^*(F_{j-1}) \times (F^{(j)}) = Q_jS^*(F_{j-1})\,v_2$, если только $P_iv_1 = P_jv_2 = 0$. Действительно, в этом случае обе части приведенных равенств равны 0. Но тогда, согласно [2], i-струя ряда H и j-струя ряда F приведены к полной нормальной форме, инвариантной относительно действия группы G. Поскольку ряды H и F эквивалентны, то их k-струи должны совпадать при $k = \max(i, j)$. Отсюда и следует утверждение леммы.

Тем самым, каждый ряд $F \in K[n, p]$ определяет целочисленный инвариант, который будем обозначать $p(F)$. Коэффициенты ряда $P^{(k)}H$, где $k = p(F)$, H — неполная нормальная форма F, также инвариантны.

Заметим, что $p(F) = \infty$ тогда и только тогда, когда ряд эквивалентен своему линейному приближению P_1F.

П. 3. По определению, ряд $F \in K[n, p]$ называется k-определенным, если ему эквивалентен любой ряд с той же k-струей (все — относительно фиксированной группы G). Ряд называется конечно-определенным, если он k-определен при некотором конечном k. Справедливо следующее утверждение (см. [1] — [3]): для k-определенности ряда $F \in K[n, p]$ необходимо и достаточно, чтобы уравнение $S(F)\lambda = \tau$ имело решение $\lambda \in L[G]$ для любого $\tau \in K[n, p]$, если только $P_k\tau = 0$.

Определим проекторы $D(F, s): K[n, p] \to \operatorname{Ker} L^*(F, s)$, $E(F, s)$: $K[n, p] \to \operatorname{Im} L(F, s)$ как суперпозиции проектора $P^{(s)}$ с ортопроекторами на $\operatorname{Ker} L^*(F, s)$ и $\operatorname{Im} L(F, s)$ (соответственно). Обозначим через $T(F, s)$ линейные операторы, зависящие от ряда F и натурального $s > p(F)$, и действующие по правилу: $T(F, s): \operatorname{Ker} L(F, s - p(F) + 1) \to \operatorname{Ker} L^*(F, s)$; $T(F, s)\lambda = D(F, s)\,S(F^{(r)})\,\lambda$, $r = p(F)$.

Теорема 1. *Пусть G действует линейно, $p(F) < \infty$, $d < \infty$ — максимальное из таких чисел s, что оператор $T(F, s)$ — не сюръективен. Тогда ряд F d-определен.*

Доказательство теоремы 1 приведем в п. 7. Сформулируем важное условие одного резонанса и следствия теоремы 1 для этого случая.

П. 4. Пусть $\nu_F(j) = \dim \operatorname{Ker} L^*(F, j)$ $(j \geqslant 2)$. Допустим, что нам известны такие числа $v_1, \ldots, v_n$, зависящие от матрицы линейного приближения ряда F и группы G, для которых выполнено $\nu_F(j) = c \cdot \pi_F(j)$, где $\pi_F(j)$ — число пар $k \in (1, \ldots, n)$, (α), $|\alpha| = j$, для которых выполнено $v_k = \alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_nv_n$; c — множитель, зависящий только от группы G. Здесь $(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — целочисленный мультииндекс.

Числа $v_1, \ldots, v_n$ будем называть в этом случае резонансными характеристиками, соотношения $v_k = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ — резонансными порядка j, где $j = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Будем говорить, что линейное приближение ряда F удовлетворяет условию одного резонанса, если существует такой мультииндекс (β), $|\beta| \geqslant 2$, что из равенства $k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n = 0$ для целых k_i, из которых $(n-1)$ — неотрицательны, а одно — не меньше, чем -1, следует, что $k_i = l\beta_i$ для некоторого целого $l \geqslant 1$. Число $|\beta|$ назовем степенью резонанса.

Если линейное приближение ряда F удовлетворяет условию одного резонанса степени τ, то $\operatorname{Ker} L(F, j) \neq \{0\}$ только тогда, когда $j = l\tau + 1$ при некотором натуральном l. Числа $r_j = j\tau + 1$ — резонансные. Очевидно, что число $p(F)$ — тоже. Если число t резонансное, то и $t + p(F) - 1$ — резонансное.

Используя введенные определения, сформулируем некоторые следствия теоремы 1. Они справедливы для линейного действия группы G.

Следствие 1.1. *Пусть линейное приближение ряда F удовлетворяет условию одного резонанса, $p(F) < \infty$, а s — наибольшее из таких чисел p, что оператор $T(F, r_p)$ — не сюръективен. Тогда ряд F r_s-определен.*

Следствие 1.2. *Пусть линейное приближение ряда F удовлетворяет условию одного резонанса, $p(F) < \infty$ и существует $s > p(F)$ такое, что оператор $T(F, r_s)$ невырожден. Пусть также $\dim \operatorname{Ker}_L(F, j) = \nu_F(j)$. Тогда ряд F конечно-определен.*

Утверждение следствия 1.1. вытекает из того, что область определения $T(F, j)$ — нулевая, если j — не резонанское число.

Докажем следствие 1.2. Пусть $d(p)$ — определитель матрицы, соответствующей линейному оператору $T(F, r_p)$ (эта матрица по условию квадратная). Поскольку G — подгруппа $G[n, p]$, то она действует алгебраически на коэффициенты ряда F. Тем самым, $d(p)$ — полином целого переменного p. Так как $d(s) \neq 0$, то найдется такое t, что $d(p) \neq 0$ при $p > t$. Тогда, в силу следствия 1.1., ряд F t-определен.

П. 5. Применим теорему 1 и ее следствия к этому случаю, когда G является группой замен пространственной переменной в автономных дифференциальных уравнениях $\frac{dx}{dt} = F(x)$; $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $F = (f_1, \ldots, f_n)$; $F(0) = 0$ **(4)**.

В этом случае $G = \{\varphi(x), \varphi'(x)y, \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = I\}$; $g.F = \varphi' \times F(\varphi^{-1})$; $(g = \varphi(x), \varphi'(x)y)$; $L[G] = K^{(2)}[n, n] + K^{(3)}[n, n] + \cdots$; $S(F)\lambda = F'\lambda - \lambda' F$; $L(F, i)\lambda = A\lambda - (\lambda')Ax$ $(\lambda \in L[G], F \in K[n, n])$, где A — матрица линейного приближения ряда F.

Оператор $L(F, i)$ имеет собственные числа $\{\lambda_k - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j\}$ $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = i, \quad k \in (1, \ldots, n))$, где λ_i — собственные числа матрицы A.

Таким образом, собственные числа матрицы линейного приближения ряда служат для данной группы резонансными характеристиками. Множитель c, фигурирующий в определении резонансных характеристик, равен в этом случае 1.

Если выполнено условие одного резонанса, то можно воспользоваться следствием 1.1. и найти показатель конечной определенности ряда. Оказывается, что если $p(F)=r_t$ (а число $p(F)$ — обязательно резонансное), то ряд F r_{2t}-определен.

Мы получили, тем самым, следующее утверждение [4, 5]: если матрица линейного приближения ряда удовлетворяет условию одного резонанса степени τ, $p(F)=t\tau+1$, то ряд F является $(2t\tau+1)$-определенным.

В частности, при этих условиях система (4) эквивалентна системе с рядом $Q(x)$ в правой части, таким, что $Q=Pr_{2t}H$, где H — неполная нормальная форма F.

Если же $p(F)=\infty$, то ряд F эквивалентен своей линейной части, а система (4) — линейной.

Если $n=1$ и ряд F имеет вид $\lambda x+\cdots$, где $\lambda\neq 0$, то он эквивалентен своей линейной части λx. Если же $\lambda=0$ и ряд F имеет вид $ax^m+\cdots$, то, пользуясь теоремой 1, можно заключить, что он $(2m-1)$-определен. В частности, его можно некоторым преобразованием привести к виду ax^m+bx^{2m-1} при некотором b [7].

П. 6. Применим теперь теорему 1 со следствиями к случаю действия группы замен переменных в дифференциальных формах I степени вида $\omega=f_1(x)\,dx_1+\cdots+f_n(x)\,dx_n$, $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $f_i(0)=0$.

Если каждой форме соотнести ряд $F=(f_1,\ \ldots,\ f_n)$, то форме, пол ченной путем замены $x=\Phi(y)$, $\Phi(0)=0$, $\Phi'(0)=I$, будет соответствовать ряд $(\Phi')^tF(\Phi)$. В этом случае $G=\{\varphi^{-1}(x),\ (\varphi')^ty,$ $\varphi(0)=0;\quad \varphi'(0)=I\};\quad S(F)\lambda=F'\lambda+(\lambda')^tF;\quad L(F,i)\lambda=A\lambda+$ $+(\lambda')^tAx\,(F\in K[n,n],\quad \lambda\in L[G]=K^{(2)}[n,n]+\cdots)$. Здесь A — матрица линейного приближения ряда F.

В дальнейшем в п. 6 мы будем опираться на результаты работы [6]. Не нарушая общности, можно считать, что число n — четное. Это связано с тем, что неполную нормальную форму ряда от $2p+1$ переменных можно рассматривать как отображение $K^{2p}\to K^{2p}$. При этом из канонического вида матрицы A «отбрасываются» средние строка и столбец, на пересечении которых всегда стоит 1 (при нечетной размерности одно из собственных чисел матрицы $A^{-1}A^t$ обязательно равно 1). Мы ограничимся «невырожденным» случаем, когда собственные числа $A^{-1}A^t$ отличны от $0,\pm 1$ и различны. Тогда система уравнений $L(F,i)\lambda=0$ распадается на независимые подсистемы, каждой из которых соответствуют две пары: $k\in(1,\ \ldots,\ n)$ и (α), $|\alpha|=i$. Определитель подсистемы, которой соответствует одна из этих пар, равен $d_{k,(\alpha)}=$

$= \lambda_{n+1-k}(\lambda_{n+1-k}-1)^{-1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\lambda_i - 1)^{-1}$, где λ_i — собственные числа $A^{-1}A^t$. Числа λ_i возможно занумеровать так, чтобы $\lambda_j \lambda_{n+1-j} = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$. Пусть $\gamma_j = (\lambda_j - 1)^{-1}$. Тогда $d_{k, (\alpha)} = -\gamma_k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \gamma_j$.

Отсюда можно заключить, что числа γ_j являются для данной группы резонансными характеристиками.

Множитель c, фигурирующий при определении резонансных характеристик, равен в этом случае $1/2$.

При $n = 2$ с помощью полученных результатов возможно провести полную классификацию рядов относительно указанной в этом пункте группы. В этом случае собственные числа $A^{-1}A^t$ равны λ и λ^{-1}. Оказывается, что если они не являются рациональными положительными, или если ни одно из них не является целым отрицательным числом, то $\nu_F(j) = 0$ $(j \geqslant 2)$ и ряд эквивалентен своей линейной части. Если одно из чисел λ или λ^{-1} равно $-M$ для натурального M, то $\gamma_F(j) = 0$ при $j \neq M$, откуда легко следует, что ряд в этом случае либо M-определен (если $p(F) = M$), либо эквивалентен своей линейной части (если $p(F) = \infty$). В первом случае полную систему инвариантов образуют коэффициенты $P^{(M)}H$, где H — неполная нормальная форма F.

В случае $\lambda = pq^{-1}$, где p и q — натуральные взаимнопростые числа, выполнено условие одного резонанса, степень резонанса равна $p+q$. Если $p(F) < \infty$, то $p(F) = s(p+q)+1$ для некоторого s. Применяя следствие 1.1, получаем результат, аналогичный результату п. 5, ряд F в этом случае является $2s(p+q)$-определенным. Полной системой инвариантов для рядов с таким линейным приближением являются коэффициенты $H^{(r_s)}$ и $H^{(r_{2s})}$.

Итак, при $n = 2$ вопрос о конечной определенности всегда решается в терминах свойств линейного приближения ряда; эти результаты легко перенести на случай $n = 3$.

При $n = 1$ ненулевая форма либо эквивалентна своей линейной части (если последняя ненулевая), либо конечно-определена. Это следует из теоремы 1.

При $n \geqslant 4$ и выполнении условия одного резонанса можно воспользоваться рассуждением, приведенном в доказательстве следствия 1.2. Значение полинома $d(p)$ можно искусственным образом определить при $p = 0$. Оно оказывается ненулевым. Тогда $d(p)$ — ненулевой полином, и мы можем заключить, что ряд конечно-определен (если только $p(F) < \infty$). Но при этом порядок конечной определенности не удается определить в связи с громоздкостью выкладок. Можно предположить, что верен тот же результат, что в п. 5 и в п. 6 для $n = 2, 3$, т. е. что ряд F r_{2t}-определен, если $p(F) = r_t$ и что этот результат распространяется и на другие подгруппы группы контактных преобразований.

П. 7. Докажем теорему 1.

Поскольку свойство k-определенности инвариантно относительно действия группы, то мы вправе считать, что ряд F имеет неполную нормальную форму.

Зафиксируем произвольное $\tau \in K^{(i)}[n, p]$, $i > d$. Согласно [2] достаточно проверить, что уравнение $P_i S(F)\lambda = \tau$ имеет решение относительно неизвестного $\lambda \in L[G]$. По условию, оператор $T(F, i)$ — сюръективен. Найдем такое $\psi_1 \in \operatorname{Ker} L(F, \ i - p(F) + 1)$, что $D(F, i) S(F^{(r)}) \psi_1 = D(F, i)\tau (r = p(F))$.

Пусть $\psi_2 \in L^{(i)}[G]$ таково, что $L(F, i)\psi_2 = E(F, i)\tau - E(F, i) \times \times S(F^{(r)})\psi_1 (r = p(F))$. Покажем, что $P_i S(F)(\psi_1 + \psi_2) = \tau$. Действительно $P_i S(F)(\psi_1 + \psi_2) = P_i S(F)\psi_1 + P_i S(F)\psi_2 = P_i S(F)\psi_1 + + L(F, i)\psi_2 = P_i S(F)\psi_1 + E(F, i)\tau - E(F, i) S(F^{(r)})\psi_1$. Мы воспользовались свойством (2) и линейностью действия группы G.

Поскольку $\psi_1 \in \operatorname{Ker} L(F, i - p(F) + 1)$, снова, согласно (2) и линейности действия группы, получаем $P_i S(F)\psi_1 = P_i \times \times S(F^{(p(F))})\psi_1 = D(F, i)\tau + E(F, i) S(F^{(p(F))})\psi_1$. Отсюда имеем $P_i \times \times S(F)(\psi_1 + \psi_2) = E(F, i)\tau + D(F, i)\tau = \tau$.

Теорема 1 доказана.

П. 8. С помощью теоремы 1 мы установили, что если линейное приближение ряда удовлетворяет условию одного резонанса (относительно групп из пп. 5, 6), то оно конечно-определено относительно этой группы или эквивалентно своему линейному приближению. Этот факт можно распространить и на другие подгруппы $G[n, p]$. Сформулируем теперь такое условие на линейное приближение ряда, при котором он не является конечно-определенным независимо от нелинейных членов.

Теорема 2. *Пусть* $\dim \operatorname{Ker} L(F, j) \leqslant \nu_F(j)$; $\sup\limits_j \nu_F(j) = \infty$. *Тогда ряд F не может быть конечно-определенным.*

Доказательство этой теоремы приведем в п. 9. Сначала докажем некоторые ее следствия.

Пусть Γ_F — полугруппа таких мультииндексов (α), $|\alpha| \geqslant 2$, что $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, где v_i — резонансные характеристики линейного приближения $P_1 F$. Если выполнено условие одного резонанса, то полугруппа Γ_F имеет одну образующую. Обратное неверно, поскольку могут присутствовать резонансные соотношения типа $v_k = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, $\alpha_k = 0$. Если $\dim \operatorname{Ker} L(F, j) \leqslant \leqslant \nu_F(j)$, то справедливо

Следствие 2.1. *Если полугруппа Γ_F имеет 2 или более образующих, то ряд F не может быть конечно-определенным.*

Доказательство. Для этого случая легко доказать, что $\sup\limits_j \pi_F(j) = \infty$, но тогда и $\sup\limits_j \nu_F(j) = \infty$, и можно воспользоваться теоремой 2.

В частности, если действует группа из п. 5 и для собственных чисел матрицы линейного приближения выполнено 2 независимых соотношения $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, $\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n =$

$=0$, (мультииндексы $(\alpha)=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta)=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ не пропорциональны целочисленно), то такой ряд не является конечно-определенным. Тот же вывод можно сделать, если действует группа из п. 6 и 2 аналогичных соотношения выполнены для чисел $\gamma_i=(\lambda_i-1)^{-1}$, где λ_i — собственные числа $A^{-1}A^t$ (A — матрица линейного приближения ряда).

Следствие 2.2. *Пусть действует группа из п. 6, A — матрица линейного приближения ряда F, λ_i — собственные числа $A^{-1}A^t$ занумерованные так, что $\lambda_j\lambda_{n+1-j}=1$ $(j=1, \ldots, n)$; $\gamma_j=(\lambda_j-1)^{-1}$. Пусть существует такой мультииндекс (α), $|\alpha|\geqslant 2$, для которого $\alpha_1\gamma_1+\cdots+\alpha_n\gamma_n=0$, и такое k, что $\alpha_k\neq 0$, $\alpha_{n+1-k}\neq 0$. Пусть также $n\geqslant 4$. Тогда ряд F не может быть конечно-определенным.*

Доказательство. Согласно условию, существует мультииндекс $(\beta)=(\alpha)-l_k-l_{n+1-k}+l_p+l_{n+1-p}$ $(p\neq k,\ n+1-k)$. Очевидно, что (α) и (β) не пропорциональны целочисленно. Покажем, что $\beta_1\gamma_1+\cdots+\beta_n\gamma_n=0$. Действительно, $\sum_{i=1}^{n}\beta_i\gamma_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\gamma_i-$ $-\gamma_k-\gamma_{n+1-k}+\gamma_p+\gamma_{n+1-p}$. Заметим, что $\gamma_i+\gamma_{n+1-i}=-1$. Тогда $\beta_1\gamma_1+\cdots+\beta_n\gamma_n=0$, и остается воспользоваться следствием 2.1.

Следствие 2.3. *Пусть действует группа из п. 6, а матрица A линейного приближения ряда F такова, что $A=A^t$. Если $n>1$, то ряд F не может быть конечно-определен.*

Доказательство. В этом случае включение $\varphi\in\operatorname{Ker} L^*(F, j)$ является следствием равенства $\varphi+(\varphi')^t x=0$, или, для коэффициентов $\varphi_k^{(\alpha)}$ при $x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$ в k-ой координате $\varphi:\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^{((\alpha)+l_k-l_i)}=$ $=0$. Отсюда можно заключить, что $\nu_F(k)$ не меньше числа мультииндексов, по модулю равных k. Поскольку $\dim\operatorname{Ker} L(F, j)=$ $=\nu(j)$, $\sup_j \nu(j)=\infty$, то лемма доказана.

Если $\dim L^{(j)}[G]\leqslant\dim K^{(j)}[n, p]$ (это верно для групп из пп. 6, 7 и многих других), то справедливо.

Следствие 2.4. *Пусть $P_1F=0$, $n>1$. Тогда ряд F не может быть конечно-определенным.*

Доказательство. В этом случае $L(F, i)\lambda=A\varphi+\psi(x, A)=$ $=0$; $(\lambda\in L^{(i)}[G],\ \lambda=(\varphi(x), \psi(x, y))$. Действительно, $A=0$ и $\psi(x, 0)=0$. Значит, $\operatorname{Ker} L^*(F, i)=K^{(i)}[n, p]$; $\operatorname{Ker} L(F, i)=$ $=L^{(i)}[G]$. Поскольку $n>1$, то $\sup_j \nu_F(j)=\infty$, и следствие доказано.

П. 9. Докажем теорему 2.

Пусть $p(F)$ — инвариант ряда F из леммы п. 2. Разберем сначала $p(F)<\infty$. Тогда ряды F и P_1F эквивалентны. Если бы ряд F был k-определен, то любой ряд Q с k-струей, такой же как у F был эквивалентен F. По условию найдется $s>k$, при котором $\operatorname{Ker} L^*(F, s) \neq \{0\}$. Построим ряд Q, имеющий неполную нормальную форму и такой, что $P^{(s)}Q \neq 0$. Согласно лемме п. 2 ряды F и Q не могут быть эквивалентны ($p(F) = \infty$, $p(Q) \leqslant s$), и мы приходим к противоречию.

Пусть теперь $p(F) < \infty$. Предположим, что ряд F k-определен. Тогда ряд P_kF также k-определен. Согласно критерию Мазера [1—2] уравнение $S(P_kF)\lambda = \tau_{k+1} + \cdots + \tau_{k+s}$ должно иметь решение, каким бы ни было s и $\tau_{k+i} \in K^{(k+i)}[n, p]$. Неизвестное λ должно принадлежать $L[G]$.

Выберем τ_{k+i} так, чтобы $\tau_{k+i} \in \operatorname{Ker} L^*(F, k+i)$ $(i = 1, \ldots, s)$. Тогда уравнение (5) можно переписать в систему, которую мы разделим на 2 части: $D(F, k+i) S(P_kF)\lambda = \tau_{k+i}$ $(i = 1, \ldots, s)$ **(6)** и $E(F, k+i) S(P_kF)\lambda = 0$ $(i = 1, \ldots, s)$ **(7)**.

Эти уравнения представляют собой линейнуюсистему относительно коэффициентов λ.

Заметим, что в уравнения (6) коэффициенты при $\lambda^{(j)}$ фактически не входят, когда $j > k + s - p(F) + 1$. Действительно, если $Q_{k+s-p(F)+1}\lambda = 0$, то $D(F, k+i) S(P_kF)\lambda = D(F, k+i) L(F)\lambda + D(F, k+i) S(P_kF - P_1F)\lambda = 0$.

Используем свойство (2) и определение оператора $D(F, j)$. Из уравнений (7) получим:

$$Q^{(2)}\lambda \in \operatorname{Ker} L(F, 2);\quad Q^{(3)}\lambda \in \operatorname{Ker} L(F, 3) + L^{-1}(F, 3)\tau_3,$$

где

$$\tau_3 = E(F, 3)(S(P_kF)(Q_2\lambda)); \ \ldots$$

$$Q^{(\mu)}\lambda \in \operatorname{Ker} L(F, \mu) + L^{-1}(F, \mu)\tau_\mu,$$

где $\mu = k + s - p(F) + 1$; $\tau_\mu = E(F, \mu)(S(P_kF)(Q_{\mu-1}\lambda))$.

Эти уравнения в совокупности с уравнениями (6) представляют собой линейную систему относительно $\sum_{j=2}^{\mu} \gamma(j)$ неизвестных, $\mu = k + s - p(F) + 1$, $\gamma(j) = \dim \operatorname{Ker} L(F, j)$.

Поскольку на правую часть (5) накладывается единственное требование $\tau_{k+i} \in \operatorname{Ker} L^*(F, k+i)$, то количество уравнений в системе (5) равно $\sum_{j=1}^{s} \nu(k+j)$.

Система (5) должна по предположению иметь решение, значит, должно быть выполнено $\sum_{j=2}^{\mu} \gamma(j) \geqslant \sum_{j=1}^{s} \nu(k+j)$ и подавно выполнено неравенство $\sum_{j=2}^{\mu} \nu_F(j) \geqslant \sum_{j=1}^{s} \nu_F(k+j)$ или $\sum_{j=1}^{s} [\nu_F(k+j) - \nu_F(k+j-p(F))] \leqslant \sum_{j=2}^{k-p(F)} \nu_F(j)$ или $\sum_{j=1}^{p(F)} \nu_F(k - p(F) + s + j) \leqslant \sum_{j=1}^{p(F)} \nu_F(k - p(F) + j)$ $\sum_{j=2}^{k-p(F)}$ **(8)**.

Неравенство (8) должно быть выполнено при любых s. Поскольку его правая часть от s не зависит, а левая, в силу условия теоремы, может быть сколь угодно большой, то мы пришли к противоречию. Теорема 2 доказана.

П. 10. Как следует из теорем 1, 2 и их следствий, отображение является конечно-определенным, если его линейное приближение удовлетворяет условию одного резонанса и $p(F) < \infty$ (относительно групп из пп. 5, 6, а также других подгрупп $G[n, p]$) и не является конечно-определенным, если полугруппа Γ_F имеет 2 или более образующих (последнее верно для любой подгруппы $G[n, p]$, если $\dim \operatorname{Ker} L(F, j) \leqslant \nu_F(j)$).

Если полугруппа Γ_F пуста, то может быть выполнено не более конечного числа резонансных соотношений (доказать это можно по схеме доказательства аналогичного факта в работе [3], гл. I), откуда следует конечная определенность ряда F, если только $p(F) < \infty$.

Если $p(F) = \infty$, то ряд F эквивалентен P_1F.

Все вышесказанное не охватывает только один случай — когда полугруппа Γ_F имеет одну образующую, но не выполнено условие одного резонанса. Покажем, что в этом случае вопрос о конечной определенности не может быть решен в терминах линейного приближения ряда, т. е. что существуют два ряда с одинаковой линейной частью, один из которых конечно-определен, а другой — нет, хотя ни один из них не эквивалентен своей линейной части.

Пусть в $K[n, n]$ действует группа из п. 5 и ряд F имеет линейное приближение с матрицей $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$; $\lambda_1 = \sqrt{2} - 1$; $\lambda_2 = \sqrt{2}$; $\lambda_3 = 2$; $\lambda_4 = -1$.

Такое линейное приближение определяет следующие резонансные соотношения: $\lambda_i = \lambda_i + k\lambda_3 + 2k\lambda_4$, $(k = 1, \ldots, i = 1, \ldots, 4)$; $\lambda_1 = \lambda_2 + k\lambda_3 + (2k+1)\lambda_4$, $(k = 1, \ldots)$; $\lambda_2 = \lambda_1 + k\lambda_3 + (2k-1)\lambda_4$, $(k = 1, \ldots)$.

Полугруппа Γ_F имеет одну образующую $(0, 0, 1, 2)$, а условие одного резонанса не выполнено.

Покажем, что если ряд F имеет вид $F = Ax + f(x)$, $f \neq 0$, $f \in \operatorname{Ker} L^*(F, 3)$, то он не является конечно-определенным.

Будем рассуждать по схеме доказательства теоремы 2. Если бы отображение F было конечно-определено, то уравнение $S(F)\lambda = \tau$ имело бы, согласно критерию Мазера, решение при любом $\tau \in \operatorname{Ker} L^*(F, 3k+1)$, если только k достаточно большое. Это уравнение определяет линейную систему относительно коэффициентов при $\lambda^{(3k-1)}$; $\lambda^{(3k-1)} \in \operatorname{Ker} L(F, 3k-1)$; $D(F, 3k+1) \times S(f)\lambda^{(3k-1)} = \tau$.

Эта система содержит $\nu_F(3k-1)$ неизвестных и $\nu_F(3k+1)$ уравнений с произвольной правой частью. Но $\nu_F(3k-1) = 1$; $\nu_F(3k+1) = 4$. Значит, уравнение $S(F)\lambda = \tau$ неразрешимо при некотором τ, и ряд F не является конечно-определенным.

Аналогичным образом доказывается, что если $f \in \operatorname{Ker} L^*(F, j)$, $f \neq 0$, а j делится на 3 с остатком 0 или 2, то ряд $Ax + f(x)$ не может быть конечно-определенным.

Если же $F = Ax + f(x)$, $f \in \operatorname{Ker} L^*(F, 3k+1)$, $f \neq 0$, то, пользуясь теоремой 1, можно доказать конечную определенность ряда и определить ее показатель. В этом случае $f(x) = (t_1 x_1 x_3^k x_4^{2k}, t_2 x_2 x_3^k x_4^{2k}, t_3 x_3^{2k+1} x_4^{2k}, t_4 x_3^k x_4^{2k+1})$. Рассмотрим два числа: $p_1 = (t_4 - t_1 - t_2)(t_3 + 2t_4)^{-1}$; $p_2 = (-t_1 - t_2 - t_4)(t_3 + 2t_4)^{-1}$. Определим число p следующим образом. Если оба числа p_1 и p_2 не являются натуральными, то $p = 0$, если одно из них, например p_1, натуральное, а другое — нет, то $p = p_1$, если и p_1 и p_2 натуральные, то $p = \max(p_1, p_2)$.

Пользуясь теоремой 1, можно доказать, что ряд F будет $(3k + 1 + p)$-определен.

Аналогичные результаты можно получить и для случая действия группы из п. 6, когда резонансные характеристики линейной части ряда следующие: $\gamma_1 = \sqrt{2}$; $\gamma_2 = -2\sqrt{2}$; $\gamma_3 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; $\gamma_4 = \sqrt{3}$; $\gamma_i = -1 - \gamma_{9-i}$ $(i = 5, \ldots, 8)$.

Таким образом, в том случае, когда Γ_F имеет одну образующую, но не выполнено условие одного резонанса, вопрос о конечной определенности ряда не может быть решен в терминах линейного приближения ряда — это зависит от нелинейной части ряда.

Список литературы: 1. *Мазер Дж.* Устойчивость отображений, III.— Математика, 1970, с. 146—175. 2. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы, инварианты и локальные отображения.— Киев: Наук. думка, 1979.—173 с. 3. *Гомозов Е. П.* Конечная определенность ростков гладких отображений.—Дис., канд. физ.-мат. наук.—Харьков, 1976.—105 с. 4. *Брюно А. Д.* О локальных инвариантах дифференциальных уравнений.— Мат. заметки, 1973, 14, № 4, с. 499—507. 5. *Мархашов Л. М.* Инварианты многомерных систем с одним резонансным соотношением.— ПММ, 1974, 38, № 2, с. 233—239. 6. *Житомирский М. Я.* Об эквивалентности дифференциальных форм.— Теория функций, функц. анализ и их прил., 1981, вып. с. 35. 7. *Takens F.* Normal forms for certain singularities of vector fielrs.— Ann. Inst. Fouries, 1973, 23, № 2, p. 163—165.

Поступила в редколлегию 14.10.80.