УДК 517.948 : 513.8 + 519.4

ВУ КУОК ФОНГ

КВАЗИГИПОНОРМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ОПЕРАТОРЫ КЛАССА K

Линейный ограниченный оператор T в гильбертовом пространстве H называется гипонормальным [1], если $\|T^*x\| \leqslant \|Tx\|$ для всех x, квазигипонормальным [2], если $\|T^*Tx\| \leqslant \|T^2x\|$ для всех x и оператором класса K [2], если

$$\|T^m x\| \leqslant C_{n,m}(T)\|x\|^{\frac{n-m}{n}}\|T^n x\|^{\frac{m}{n}},\ 1 \leqslant m < n.$$

Через $K_{n,m}$ обозначим подкласс класса K, состоящий из операторов T, таких, что $C_{n,m}(T) = 1$ [4].

Цель настоящей статьи — изучить спектральные свойства квазигипонормальных операторов и операторов класса K.

1. Спектр полярного множителя. Пусть $T = UP$ — полярное разложение ограниченного оператора T, где P — неотрицательный оператор, а U — частичная изометрия, причем $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} P$.

Теорема 1. *Оператор T квазигипонормален тогда и только тогда, когда $U^*P^2U - P^2 \geqslant 0$.*

В дальнейшем $\sigma(T)$ обозначает спектр оператора T.

Теорема 2. *Если T — квазигипонормальный оператор то либо а) $\sigma(U) = \{z : |z| \leqslant 1\}$, либо б) $\sigma(U) \subset \{z : |z| = 1\} \cup \{0\}$, причем, если б) имеет место, T гипонормален.*

Теорема 3. *Если T — квазигипонормальный оператор и $e^{i\theta} \in \sigma(U)$ то существует $r > 0$, такое, что $re^{i\theta} \in \sigma(T)$.*

Доказательство теорем 2 и 3 основано на теореме 1 и развитой в [5, 6] технике, использующей переход в факторпространство $\hat{H}$ пространства ограниченных последовательностей $m(H)$ с членами из H по подпространству $c_0(H)$ последовательностей, стремящихся к 0.

2. Нормальность. Квазигипонормальные операторы часто оказываются нормальными, если на них наложить соответствующие условия.

Теорема 4. *Если T и $T^* - \lambda$ оба квазигипонормальны при некотором комплексном λ, то T нормален.*

Следующая теорема дает нижнюю оценку для площади спектра квазигипонормального оператора.

Теорема 5. *Если T — квазигипонормальный оператор, то $\pi\|K\| \leqslant \mu(\sigma(T))$, где $K = U^*P^2U - P^2$, μ — плоская мера Лебега.*

Следствие 6. *Если T — квазигипонормальный оператор и $\sigma(T)$ имеет нулевую плоскую меру Лебега, то T нормален.*

Квазигипонормальный оператор T называется простым, если не существует нетривиального приводящего подпространства M, на котором T индуцирует нормальный оператор.

Обобщением следствия 6 является следующая

Теорема 7. *Если T — простой квазигипонормальный оператор и N — произвольный открытый круг в комплексной плоскости, то $\mu(\sigma(T) \cup N) > 0$, как только $\sigma(T) \cap N \neq \varnothing$.*

Теорема 8. *Если T — квазигипонормальный оператор, такой что $ST = T^*S$ для некоторого оператора S с $0 \bar{\in} \overline{w(S)}$, где $W(S)$ обозначает числовую область оператора S, то T самосопряжен.*

3. ***f-гипонормальные операторы.*** Пусть f — некоторая вещественная измеримая функция. Оператор T называется f-гипонормальным, если $f(T^*T) \geqslant f(TT^*)$. Для функции $f(x) = x$ мы придем к прежнему определению гипонормальных операторов.

Теорема 9. *Пусть T — f-гипонормальный оператор, где f — вещественная измеримая взаимнооднозначная функция. Если $\sigma(T)$ лежит на вещественной оси, то T самосопряжен.*

4. Операторы класса К. **Теорема 10.** *Пусть T — оператор класса $K_{n,m}$. Если T^mT^{*m} коммутирует с операторами $T^{*n-m} \times T^{n-m}$ и $T^{*2m-n}T^{2m-n}$, где $2m \geqslant n$, то $(T^{n-m}T^{*n-m})^m \leqslant (T^{*m} \times T^m)^{n-m}$ и T^m имеет нетривиальное инвариантное подпространство.*

Следствие 11. *Если T — оператор класса $K_{2,1}$ и TT^* коммутирует с T^*T, то T гипонормален и имеет нетривиальное инвариантное подпространство.*

Контрпример. Покажем, что существует оператор класса $K_{2,1}$

(т. е. $\|Tx\|^2 \leqslant \|x\| \cdot \|T^2x\|$) с вещественным спектром (причем T даже имеет двумерную мнимую компоненту), но все же несамосопряженный. Этот пример строится следующим образом.

Выберем ортонормированный базис $\{e_n\}_1^\infty$ в H. Положим $Ue_1 = -e_1$, $Ue_n = e_n$, $n > 1$. Оператор P в этом базисе действует так: $Pe_1 = \xi_{11}e_1 + \xi_{12}e_2$, $Pe_n = \xi_{n,\,n-1}e_{n-1} + \xi_{n,\,n}e_n + \xi_{n,\,n+1}e_{n+1}$, $n > 1$.

Доказывается, что можно выбрать по индукции $\xi_{n,\,n}$, $\xi_{n,\,n+1}$ так, чтобы P был строго положительным оператором, определенным на плотном множестве линейных комбинаций векторов $\{e_n\}$, и чтобы для всех n и $f \in \mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ $\|Pf\|^2 \leqslant \|PUPf\| \cdot \|f\|$.

Полученный оператор $T' = UP$ удовлетворяет неравенству $\|T'x\|^2 \leqslant \|x\|\,\|T'^2x\|$, но не будет, вообще говоря, ограниченным. Обратный к нему оператор будет ограниченным оператором класса $K_{2,\,1}$, не нормальным и имеющим двумерную мнимую компоненту по построению. Вещественность его спектра обеспечивается теоремой Болдина [7].

5. Замечания. 1. Класс квазигипонормальных операторов является собственным подклассом класса $K_{2,\,1}$, как показано в [2]. Класс гипонормальных операторов является собственным подклассом класса квазигипонормальных операторов, как показывает следующий пример оператора взвешенного сдвига с двумерными матричными весами A_i:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i > 2.$$

Теорема 3, по-видимому, является новой и для гипонормальных операторов. Теоремы 5 и 7, а также следствие 6 в классе гипонормальных операторов были получены Патнэмом [8]. Наше доказательство опирается на результаты Патнэма и на теорему 1. Понятие f-гипонормального оператора введено, очевидно, впервые. Доказательства теорем 4, 8 и 9 используют кроме прочего технику работ [5, 6].

2. В работах [4, 9] доказано, что если T — оператор класса $K_{n,\,m} \cap K_{n,\,n-m}$ и $\sigma(T)$ лежит на счетном объединении окружностей с общим центром в нуле, то $T^{d(n,\,m)}$ нормален, где $d(n,\ m)$ — наибольший общий делитель n и m. Приведенный контрпример дает отрицательное решение возникшей в связи с этим гипотезы Ю. И. Любича о том, что если T — оператор класса $K_{n,\,m} \cap K_{n,\,n-m}$ и $\sigma(T)$ лежит на вещественной оси, то $T^{d(n,\,m)}$ самосопряжен, а также отрицательный ответ на давно поставленный вопрос Фурута [10, 11] о том, что если T — оператор класса $K_{2,\,1}$ (такие операторы Фурута называл паранормальными), то выпуклая оболочка $\Sigma(T)$ его спектра $\sigma(T)$ совпадает с замыканием числовой области.

Автор искренне благодарен Ю. И. Любичу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы: 1. *Berberian S.* A note on hyponormal operators.— «Pacific J. Math», 1962, vol. 12, p. 1171—1175. 2. Seth I. H. Quasi — hyponormal operators.— «Rev. voum. math. puret et appl.», 1974, vol. 19, p. 1049—1053. 3. *Любич Ю. И.* О неравенствах между степенями линейного оператора.— «Изв. АН СССР, Математика», 1960, т. 24, с. 825—864. 4. *Любич Ю. И.* Одна теорема об операторах класса K.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1965, вып. 1, с. 212—219. 5. Berberian S. Approximate proper vectors.— «Pros. Amer. Math. Soc.», 1962, vol. 13, p. 111—114. 6. *Любич Ю. И.* О спектре представления топологической абелевой группы.— ДАН СССР, 1971, 200, № 4, с. 777—780. 7. *Bouldin R.* The numerical range of a product.— «J. Math. Anal. and Appl.,» 1970, vol. 32, № 3, p. 459—467. 8. *Putnam C. R.* An inequality for the area of huponormal operators.— «Math. Z», 1970, vol. 116, p. 223—230. 9. *Милославский А. И.* Об одном свойстве операторов класса K.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1974, вып. 21, с. 30—36. 10. *Furuta T.* On the class of paranormal operators.— «Proc. Japan Acad.», 1967, № 43, p. 594—598. 11. *Furuta T.* Some characterizations of convexoid operators.— «Rev. roum. math. puret etappl.», 18, № 6, p. 893—900.

Поступила 24 июля 1976 г.