УДК 517.9

Е. И. ТАРАПОВА

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ. I

Рассмотрим краевую задачу, порождаемую на сегменте $[0, 2\pi]$ уравнением Штурма-Лиувилля

$$-y''(x)+q(x)\,y(x)=\lambda^2 y(x) \tag{1}$$

и граничными условиями

$$hy(0)-y'(0)=0, \tag{2}$$

$$A(\lambda)\,y^2(\pi)+B(\lambda)\,y(\pi)\,y'(\pi)+C(\lambda)\,[y'(\pi)]^2=0, \tag{2'}$$

где комплекснозначная функция $q(x) \in L_1[0, 2\pi]$; h — произвольное комплексное число и $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ — многочлены от λ.

Значения параметра λ, при которых краевая задача (1)—(2′) имеет ненулевое решение, будем называть характеристическими.

Обозначим через $\omega(\lambda, x)$ решение уравнения (1) при начальных данных $\omega(\lambda, 0) = 1$, $\omega'(\lambda, 0) = h$.

Очевидно, что характеристическими значениями краевой задачи (1)—(2′) являются корни функции

$$\chi(\lambda) = \omega^2(\lambda, \pi) A(\lambda) + \omega(\lambda, \pi)\omega'(\lambda, \pi) B(\lambda) + [\omega'(\lambda, \pi)]^2 C(\lambda),$$

которая называется характеристической.

Характеристическое значение λ_n называется p-кратным, если оно является p-кратным корнем характеристической функции $\chi(\lambda)$. При этом функция $\omega_0(\lambda, x) = \omega(\lambda_n, x)$ называется собственной, а функции

$$\omega_k(\lambda, x) = \frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\omega(\lambda, x) \quad (k = 1, \ldots, p-1)$$

присоединенными к ней.

Обозначим через N наивысшую степень полиномов $A(\lambda)$, $\lambda B(\lambda)$, $\lambda^2 C(\lambda)$ и через a_N, b_N, c_N коэффициенты при λ^N соответственно у полиномов $A(\lambda)$, $\lambda B(\lambda)$, $\lambda^2 C(\lambda)$.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$a_N + ib_N - c_N \neq 0, \quad a_N - ib_N - c_N \neq 0. \tag{3}$$

Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *При условии (3) собственные и присоединенные функции краевой задачи (1)—(2′) образуют полную систему в пространстве* $L_2[0, 2\pi]$. *Если из множества всех собственных и присоединенных функций убрать любые N функций, то оставшаяся система тоже полна в пространстве* $L_2[0, 2\pi]$.

Доказательство. Удалим из множества всех собственных и присоединенных функций рассматриваемой краевой задачи N функций, отвечающих характеристическим значениям $\lambda_{k_1}, \ldots \lambda_{k_N}$. Предположим, что функция $f(x) \in L_2[0, 2\pi]$ ортогональна оставшемуся множеству собственных и присоединенных функций.

Положим $\omega(\lambda, f) = \int\limits_0^{2\pi} f(x)\,\omega(\lambda, x)\,dx$.

Тогда функция $Q(\lambda, f) = \prod\limits_{i=1}^{N}(\lambda - \lambda_{k_i})\,\omega(\lambda, f)$ будет иметь во всех характеристических точках нули, кратности которых не меньше кратностей соответствующих характеристических чисел.

Следовательно, функция $\dfrac{Q(\lambda, f)}{\chi(\lambda)}$ является целой. Оценим ее модуль при $|\lambda| \to \infty$.

Из представления решения $\omega(\lambda, x)$ с помощью оператора преобразования [1]

$$\omega(\lambda, x) = \cos\lambda x + \int_0^x K(x, t)\cos\lambda t dt \tag{4}$$

легко следует, что при $|\lambda| \to \infty$

$$|\omega(\lambda, f)| = e^{2|\mathrm{Im}\lambda\pi|}o(1) \tag{5}$$

и

$$\omega(\lambda, \pi) = \cos\lambda\pi[1 + o(1)], \quad \omega'(\lambda, \pi) = -\lambda\sin\lambda\pi[1 + o(1)], \tag{6}$$

если исключить из λ-плоскости кружки произвольно малого фиксированного радиуса с центром в нулях функций $\sin\lambda\pi$, $\cos\lambda\pi$. Поэтому $\chi(\lambda) = A(\lambda)\omega^2(\lambda, \pi) + B(\lambda)\omega(\lambda, \pi)\omega'(\lambda, \pi) + C(\lambda)[\omega'(\lambda, \pi)]^2 = [A(\lambda)\cos^2\lambda\pi - \lambda B(\lambda)\sin\lambda\pi\cos\lambda\pi + \lambda^2 C(\lambda) \times \sin^2\lambda\pi](1 + o(1)) = \cos^2\lambda\pi\left[A(\lambda) - \lambda B(\lambda)\frac{\sin\lambda\pi}{\cos\lambda\pi} + \lambda^2 C(\lambda)\frac{\sin^2\lambda\pi}{\cos^2\lambda\pi}\right] \times (1 + o(1))$ и, следовательно,

$$\chi(\lambda) = \lambda^N\cos^2\lambda\pi[(a_N - b_N \operatorname{tg}\lambda\pi + c_N \operatorname{tg}^2\lambda\pi)(1 + o(1)) + O(\lambda^{-1})] = \lambda^N\cos^2\lambda\pi[a_N - b_N\operatorname{tg}\lambda\pi + c_N\operatorname{tg}^2\lambda\pi + o(1)]. \tag{7}$$

Из равенств $\lim\limits_{\mathrm{Im}\lambda\to\pm\infty}\operatorname{tg}\lambda\pi = \pm i$ следует, что $\lim\limits_{\mathrm{Im}\lambda\to\pm\infty}[a_N - b_N\operatorname{tg}\lambda\pi + c_N\operatorname{tg}^2\lambda\pi + o(1)] = a_N \mp ib_N - c_N \neq 0$ согласно условию (3). Поэтому существуют такие числа M, $C > 0$, что при $|\mathrm{Im}\lambda| \geqslant M$ $|\lambda^N\cos^2\lambda\pi[a_N - b_N\operatorname{tg}\lambda\pi + c_N\operatorname{tg}^2\lambda\pi + o(1)]| > |\cos^2\lambda\pi||\lambda|^N \cdot C$ и, тем более,

$$|\lambda^N\cos^2\lambda\pi[a_N - b_N\operatorname{tg}\lambda\pi + c_N\operatorname{tg}^2\lambda\pi + o(1)]| > e^{2|\mathrm{Im}\lambda\pi|}|\lambda|^N C. \tag{8}$$

Функция $a_N - b_N\operatorname{tg}\lambda\pi + c_N\operatorname{tg}^2\lambda\pi$ мероморфна, периодична с периодом 1 и имеет конечные, отличные от нуля пределы при $\mathrm{Im}\lambda \to \pm\infty$. Выберем в полосе $1/2 < \mathrm{Re}\lambda < 3/2$ вертикальную прямую γ, не проходящую через нули и полюсы этой функции. Тогда

$$\min_{\lambda\in\gamma}|a_N - b_N\operatorname{tg}\lambda\pi + c_N\operatorname{tg}^2\lambda\pi| = C > 0,$$

$$|\cos^2\lambda\pi| > Ce^{2|\mathrm{Im}\lambda\pi|} \quad (\lambda \in \gamma). \tag{9}$$

Из оценок (8) и (9) следует, что на замкнутых контурах Γ_n, образованных отрезками прямых $\gamma \pm n$ и $\mathrm{Im}\lambda = \pm n\pi$ при $n \to \infty$ выполняется неравенство

$$|\chi(\lambda)| = |\lambda^N\cos^2\lambda\pi[a_N - b_N\operatorname{tg}\lambda\pi + c_N\operatorname{tg}^2\lambda\pi + 0(1)]| > e^{2|\mathrm{Im}\lambda\pi|}|\lambda|^N C. \tag{10}$$

Сопоставляя оценки (5) и (10), получаем

$$\lim_{n\to\infty}\max_{\lambda\in\Gamma_n}\left|\frac{Q(\lambda, f)}{\chi(\lambda)}\right| = \lim_{n\to\infty}\max_{\lambda\in\Gamma_n}\left|\frac{\prod\limits_{i=1}^{N}(\lambda - \lambda_{k_i})\,\omega(\lambda, f)}{\chi(\lambda)}\right| = 0, \tag{11}$$

откуда в силу теоремы Лиувилля следует, что $\omega(\lambda, f) \equiv 0$ и согласно (4)

$$\omega(\lambda, f) = \int_0^{2\pi} f(x)\left[\cos\lambda x + \int_0^x K(x, t)\cos\lambda t dt\right] dx =$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos\lambda x \left[f(x) + \int_x^{2\pi} f(t) K(x, t)\, dt\right] dx \equiv 0.$$

Из этого тождества и теоремы единственности для преобразования Фурье следует, что $f(x) + \int\limits_x^{2\pi} f(t) K(x, t)\, dt = 0$, а так как однородные интегральные уравнения типа Вольтерра имеют только тривиальные решения, то $f(x) = 0$ почти всюду. Следовательно, не существует отличной от нуля функции, ортогональной рассматриваемому семейству собственных и присоединенных функций, что и требовалось доказать.

Замечание. Граничное условие (2′) можно записать в более привычном виде:

$$y(\pi) - h(\lambda) y'(\pi) = 0, \tag{12}$$

где $h(\lambda)$ — алгебраическая функция, удовлетворяющая уравнению $h^2(\lambda) A(\lambda) + h(\lambda) B(\lambda) + C(\lambda) = 0$.

Граничные условия вида (12) ранее рассматривались тогда, когда $h(\lambda)$ — полином. В этом случае, как известно [2], полнота имеет место только на интервале $[0, \pi]$.

Список литературы: 1. *Марченко В. А.* Спектральная теория операторов Штурма—Лиувилля. Киев, «Наукова думка», 1972. 220 с. 2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1969. 523 с.

Поступила 4 апреля 1977 г.