УДК 513.882

И. М. СПИТКОВСКИЙ

О БЛОЧНОЙ СТРУКТУРЕ J-УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ. II

Пусть $L_{1,2}$, $M_{1,2}$ — гильбертовы пространства, причем L_2 и M_2 — J-пространства с сигнатурными операторами J_L и J_M соответственно. Если положить $L_{\pm} = (I \pm J_L) L_2$, то пространство L_2 представится в виде ортогональной (и одновременно J_L-ортогональной) суммы L_+ и L_-. Обозначим $p_L = \dim L_+$, $q_L = \dim L_-$. Аналогично вводятся $M_{\pm}$, p_M и q_M J-унитарным расширением пары $\{A_{11}, A_{22}\}$, где A_{jj} — линейный ограниченный оператор, действующий из L_j в M_j $(j = 1, 2)$, назовем линейный ограниченный оператор $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, действующий из $L_1 \oplus L_2$ в $M_1 \oplus M_2$ и удовлетворяющий равенствам $A (I \oplus J_L) A^* = I \oplus J_M$, $A^* (I \oplus J_M) A = I \oplus J_L$. J — унитарным расширением оператора $A_{11} : L_1 \to M_1$ будем называть J-унитарное расширение пары $\{A_{11}, A_{22}\}$, где оператор $A_{22} : L_2 \to M_2$ выбирается произвольно.

Задача J-унитарного расширения пары операторов в случае $L_j = M_j$ $(j = 1, 2)$ и $J_L = J_M (= J_0)$ рассматривалась в [1]. Полученные там результаты практически без изменений переносятся на указанную более общую ситуацию. В п. 1 приводятся формулировки соответствующих теорем, а также рассматривается задача J-унитарного расширения одного оператора A_{11}. Установлено, в частности, что условия, необходимые и достаточные для существования J-унитарного расширения, достаточны для существования регулярного J-унитарного расширения. В п. 2 приводятся некоторые приложения доказанных утверждений к теории характеристических функций. Доказано существование характеристических функций, удовлетворяющих некоторому дополнительному условию, и получен их общий вид.

Терминологией и фактами теории J-пространств, которые встречались в [1], в частности понятием J-спектральной функции J-неотрицательного оператора (см. [2]), мы в настоящей работе будем пользоваться без дополнительных разъяснений. Через $n(X)$ обозначим размерность ядра оператора X, а индексом оператора X — величину $\operatorname{ind} X = n(X) - n(X^*)$.

1. Теорема 1. *Для существования у пары $\{A_{11}, A_{22}\}$ J-унитарного расширения необходимы следующие условия:*

$$1)\ n(A_{11}) = n(A_{22}^*);\ 2)\ A_{22}J_L A_{22}^* \leqslant J_M. \tag{1}$$

$$A_{22}^* J_M A_{22} \leqslant J_L; \tag{2}$$

3) при любом $\lambda < 0$ подобны операторы $A_{11}A_{11}^*|_{\operatorname{Im} D(\lambda)}$ и $A_{22}^* J_M A_{22} J_L|_{\operatorname{Im} E(\lambda)}$, а при любом $\lambda > 0$ операторы $A_{11}A_{11}^*|_{\operatorname{Ker} D(\lambda)}$ и $A_{22}^* J_M A_{22} J_L|_{\operatorname{Ker} E(\lambda)}$.

Здесь $D(\lambda)$ — спектральная функция оператора $I - A_{11}A_{11}^*$, $E(\lambda)$ — J_L-спектральная функция оператора $Z = I - A_{22}^* J_M A_{22} J_L$, J_L-неотрицательного в силу условия (2).

Следствие 1. Для существования J-унитарного расширения пары $\{A_{11}, A_{22}\}$ необходимо, чтобы $q_L = q_M$.

Действительно, неравенство (2), примененное к вектору $x \in L_-$, приводит к выводу $(J_M A_{22}x, A_{22}x) \leqslant -\|x\|^2$, что означает корректную разрешимость сужения A_{22} на L_-, а также J_M-отрицательность подпространства $A_{22}L_-$. Согласно закону инерции [3] $q_L = \dim L_- = \dim A_{22}L_- \leqslant \dim M_- = q_M$. На основании неравенства (1) доказывается, что $q_M \leqslant q_L$.

Предположим, что J_L-спектральная функция $E(\lambda)$ регулярна. Согласно [1] существует J_L-унитарный оператор V и разложения

$$L_+ = L_+^{(1)} \oplus L_+^{(0)} \oplus N_+;\ \ L_- = L_-^{(1)} \oplus L_-^{(0)} \oplus N_-$$

($\dim N_+ = \dim N_-$), такие, что матрица оператора $VA_{22}^* J_M A_{22} J_L V^{-1}$ относительно разложения

$$L_+^{(1)} \oplus L_+^{(0)} \oplus N_+ \oplus N_- \oplus L_-^{(0)} \oplus L_-^{(1)}$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Lambda^2 & & & & & \\ & I & & & & \\ & & I-K & K\psi^* & & \\ & & -\psi K & I+\psi K\psi^* & & \\ & & & & I & \\ & & & & & \mathrm{M}^2 \end{pmatrix},$$

где Λ, μ и K — самосопряженные операторы в $L_+^{(1)}$, $L_+^{(0)}$ и N_+ соответственно; $0 \leqslant \Lambda \leqslant I$, $\mathrm{M} \geqslant I$, $K \geqslant 0$, причем 0 не является собственным числом K, а 1 — собственным числом Λ и M, ψ изометрически отображает N_+ на N_-.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1), 2) теоремы 1, причем J_L-спектральная функция $E(\lambda)$ оператора $I - A_{22}^* J_M A_{22} J_L$ регулярна. Тогда для существования у пары $\{A_{11}, A_{22}\}$ J-унитар-*

ного расширения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: 1) $\dim \overline{\operatorname{Im} K} \leqslant n(I - A_{11}A_{11}^*)$; 2) *подобны операторы*

$$A_{11}A_{11}^*\big|_{\operatorname{Im} D(-0)} \text{ и } A_{22}^*J_M A_{22}J_L\big|_{\operatorname{Im} E(-0)},$$

$$A_{11}A_{11}^*\big|_{\operatorname{Ker} D(+0)} \text{ и } A_{22}^*J_M A_{22}J_L\big|_{\operatorname{Ker} E(+0)}.$$

Здесь, как и в теореме 1, $D(\lambda)$ — спектральная функция оператора $I - A_{11}A_{11}^*$.

Обратимся теперь к задаче J-унитарного расширения оператора A_{11}. Будем расширение называть регулярным, если J_L-спектральная функция оператора Z регулярна, и нерегулярным — в противном случае.

Теорема 3. *J-унитарное расширение оператора A_{11} существует тогда и только тогда, когда* 1) $\dim \operatorname{Im} D(-0) \leqslant q_L = q_M$; 2) $n(D(+0)) \leqslant p_L$, *если* $p_L \leqslant p_M$, $n(D_1(+0)) \leqslant p_M$, *если* $p_M \leqslant p_L$; 3) $\operatorname{ind} A_{11} = p_M - p_L$, *если p_M и p_L конечны,* $n(A_{11}) = p_M$, *если* $p_M > p_L$ *и p_M бесконечно,* $n(A_{11}^*) = p_L$, *если* $p_L > p_M$ *и p_L бесконечно.*

Здесь $D(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$ — спектральные функции операторов $I - A_{11}A_{11}^*$ и $I - A_{11}^*A_{11}$ соответственно.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть J-унитарное расширение оператора A_{11} существует, $E(\lambda)$ — J_L — спектральная функция соответствующего оператора Z. На основании следствия заключаем, что $q_L = q_M$ $(= q)$. Согласно теореме 1 при любом $\lambda < 0$ подпространства $\operatorname{Im} D(\lambda)$ и $\operatorname{Im} E(\lambda)$ изоморфны. Поскольку $\operatorname{Im} E(\lambda)$ — равномерно отрицательное подпространство, его размерность в силу закона инерции не превосходит q. Следовательно, $\dim \operatorname{Im} D(\lambda) \leqslant q$. Выбирая последовательность $\lambda_n \uparrow 0$, находим $\operatorname{Im} D(-0) = \overline{\cup \operatorname{Im} D(\lambda_n)}$.

Но замыкание объединения счетного числа вложенных подпространств, размерность которых не превосходит q, само имеет размерность, не превосходящую q. Итак, $\dim \operatorname{Im} D(-0) \leqslant q$, что доказывает необходимость условия 1) теоремы. Необходимость условия 2) устанавливается аналогично.

В силу условия (1) подпространство $\operatorname{Ker} A_{22}^* J_M$ положительно и, значит,

$$n(A_{22}^*) \leqslant p_M. \tag{3}$$

Подпространство $A_{22}L_-$, как уже отмечалось при доказательстве следствия 1, J_M-отрицательно. Его ортогональное дополнение N до M_2 совпадает с $\operatorname{Ker}(I - J_L)A_{22}^*$ и потому J_M — положительно. Согласно [4] N есть максимальное J_M-неотрицательное подпространство, и потому $\dim N = p_M$. В то же время

$$\dim N \leqslant n(A_{22}^*) + \dim \overline{A_{22}L_+} \leqslant n(A_{22}^*) + p_L.$$

Таким образом, $p_M \leqslant n(A_{22}^*) + p_L$. Отсюда и из (3) при $p_M > p_L$ и бесконечном p_M вытекает, что $n(A_{22}^*) = p_M$. Полученное равенство в совокупности с условием 1) теоремы 1 доказывает необходимость условия 3) в случае $p_M > p_L$ при бесконечном p_M. Случай $p_L > p_M$ и бесконечного p_L рассматривается аналогично.

Пусть теперь p_M и p_L конечны. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

оператора $A_{22}: L_2 \to M_2$ относительно разложений $L_2 = L_+ \oplus L_-$ и $M_2 = M_+ \oplus M_-$. В силу условий p_L, $p_M < \infty$ операторы B_{11}, B_{12} и B_{21} конечномерны, и потому оператор A_{22} нетеров лишь одновременно с оператором

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix},$$

причем индексы операторов A_{22} и B совпадают. Далее, условия (1), (2) влекут обратимость оператора B_{22}. Отсюда вытекает, что оператор B, а с ним и A_{22} нетеров, причем индексы этих операторов равны $p_L - p_M$. Учитывая, что $n(A_{22}) = n(A^*_{11})$, $n(A_{22}) = n(A_{11})$, получаем отсюда необходимость условия 3) в случае конечных p_L и p_M.

Достаточность. Пусть условия 1) — 3) выполнены. Будем для определенности считать $p_L \leqslant p_M$. Тогда $\dim \operatorname{Im} D(-0) \leqslant q_L$, $n(D(+0)) \leqslant p_L$, что позволяет выбрать в L_+ и L_- подпространства $L_+^{(1)}$ и $L_-^{(1)}$, изоморфные $\operatorname{Ker} D(+0)$ и $\operatorname{Im} D(-0)$ соответственно. Зададим на $L_+^{(1)}$ оператор Λ, унитарно эквивалентный сужению $(A_{11}\ A^*_{11})^{\frac{1}{2}}$ на $\operatorname{Ker} D(+0)$, а на $L_-^{(1)}$ — оператор M, унитарно эквивалентный сужению $(A_{11}\ A^*_{11})^{\frac{1}{2}}$ на $\operatorname{Im} D(-0)$. При этом $0 \leqslant \Lambda \leqslant I$, $I \leqslant \mathrm{M}$ и 1 не является собственным числом операторов Λ и M. Обозначая $L_\pm^{(0)} = L_\pm \ominus L_\pm^{(1)}$, определим действующий в L_2 оператор R так, чтобы его матрица относительно разложения $L_2 = L_+^{(1)} \oplus L_+^{(0)} \oplus L_-^{(0)} \oplus L_-^{(1)}$ имела вид

$$R = \begin{pmatrix} \Lambda & & & \\ & I & & \\ & & I & \\ & & & \mathrm{M} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Введем оператор $W: L_2 \to M_2$, изометрически отображающий L_- на M_- (что возможно, поскольку $q_L = q_M$), $L_+ \ominus \operatorname{Ker} R$ — на некоторое подпространство $M_+^{(1)}$ пространства M_+ (что возможно в силу предположения $p_L \leqslant p_M$) и переводящий $\operatorname{Ker} R$ в нуль; W — частично изометрический оператор и, как известно [5], W^*W есть ортопроектор на $\overline{\operatorname{Im} R}$, WW^* — на $M_- \oplus M_+^{(1)}$. Положим $A_{22} = WR$. Тогда, очевидно,

$$A_{22} J_L = J_M A_{22}, \tag{5}$$

так что $A_{22}J_LA_{22}^* = J_MWR^2W^* \leqslant J_M$, $A_{22}^*J_MA_{22} = R^2J_L \leqslant J_L$, т. е. выполнены условия (1), (2). Далее,

$$I - A_{22}^*J_MA_{22}J_L = I - R^2, \tag{6}$$

так что спектральная функция $E(\lambda)$ регулярна, и для доказательства существования расширения пары $\{A_{11}, A_{22}\}$ можно, коль скоро выполнено условие 1) теоремы 1, воспользоваться теоремой 2. Условие 2) этой теоремы обеспечивается равенствами (4) и (6), условие 1) выполнено, поскольку $K = 0$.

Обратимся к проверке условия 1) теоремы 1. Отметим, что $\operatorname{Ker} A_{22}^* = \operatorname{Ker} A_{22}A_{22}^* = \operatorname{Ker} WR^2W^* = \operatorname{Ker} W^* = M \ominus \operatorname{Im} W = M_+ \ominus M_+^{(1)}$. Остается лишь показать, что подпространство $M_+^{(1)}$ может быть выбрано таким образом, чтобы $n(A_{11}) = \dim(M_+ \ominus M_+^{(1)})$.

Если p_M, $p_L < \infty$, то $\dim(M_+ \ominus M_+^{(1)}) = p_M - \dim(L_+ \ominus \operatorname{Ker} R) = p_M - p_L + n(A_{11}^*) = n(A_{11})$ в силу условия 3) теоремы. Если $p_M > p_L$ и p_M бесконечно, то $\dim(L_+ \ominus \operatorname{Ker} R) < p_M$, и $M_+ \ominus M_+^{(1)}$ обязательно имеет размерность p_M, что согласно условию 3) совпадает с $n(A_{11})$.

Наконец, если $p_M = p_L (= p)$ и бесконечны, то за счет выбора расположения подпространства $L_+^{(1)}$ всегда можно добиться того, чтобы $\dim(L_+ \ominus \operatorname{Ker} R) = p$, а тогда за счет выбора расположения $M_+^{(1)}$ — чтобы $M_+ \ominus M_+^{(1)}$ имело любую наперед заданную размерность, не превосходящую p.

В то же время $n(A_{11}) = n(A_{11}^*A_{11}) \leqslant n(D_1(+0)) \leqslant p$ в силу второго из условий 2).

Таким образом, если выполнены условия 1) — 3), то всегда можно подобрать оператор A_{22}, так чтобы удовлетворить условиям теоремы 2, и, значит обеспечить существование J-унитарного расширения оператора A_{11}. При этом всегда можно построить J-унитарное расширение, удовлетворяющее условию (5). Оно, в частности, является регулярным.

Задачу J-унитарного расширения оператора A_{11} можно рассматривать с несколько иной точки зрения. А именно, будем считать, что пространства L_2, M_2 и операторы J_L, J_M не фиксированы заранее, а являются искомыми вместе с операторами A_{21}, A_{12}, A_{22}. В такой постановке задача J-унитарного расширения всегда разрешима. Действительно, если выбрать L_2, M_2, J_L и J_M так, чтобы $q_L = q_M = \dim \operatorname{Im} D(-0)$, $p_L = n(D(+0))$, $p_M = n(D_1(+0))$, то условия 1) — 3) теоремы 3 окажутся выполненными. Отметим, что это минимальные из всех допустимых значений p_L, p_M, q_L и q_M.

2. Пусть $M_1 = L_1$, A — J-унитарное расширение оператора A_{11}. Совокупность

$$\alpha = \begin{pmatrix} L_1 & A_{11}^* & L_1 \\ A_{21}^* J_H & & A_{12} \\ M_2 & -A_{22} & L_2 \end{pmatrix}$$

называется узлом, A_{11}^* — основным оператором узла, а оператор-функция

$$\theta_\alpha(\zeta) = -A_{22} - \zeta A_{21}(I - \zeta A_{11})^{-1} A_{12} \tag{7}$$

характеристической функцией узла α [6, 7].

Рассмотрим характеристические функции узлов, удовлетворяющих дополнительному условию (5). Существование таких характеристических функций (при подходящем выборе L_2, M_2, J_L и J_M) вытекает из теоремы 3. В настоящем пункте изучаются связи таких характеристических функций друг с другом.

Из (5) следует, что $A_{22}^* J_M A_{22} J_L = A_{22}^* A_{22}$, т. е. оператор $T = A_{22}^* A_{22}$ эрмитов и J_L — эрмитов одновременно. Используя обозначения теоремы 2, мы можем сказать, что $E(\lambda)$ регулярна и $K = 0$. Из теоремы 2 следует, что с точностью до подобия определены $T|_{\mathrm{Im}\, E(-0)}$ и $T|_{\mathrm{Ker}\, E(+0)}$. Поскольку $T|_{\mathrm{Im}\,(E(+0) - E(-0))} = I$, то сужение A_{22} на $\mathrm{Im}(E(+0) - E(-0))$ — полуунитарный оператор. Размерность $\mathrm{Im}\,(E(+0) - E(-0))$ никак не связана с A_{11}. Кроме того, поскольку $K = 0$, $A_{12}|_{\mathrm{Im}(E(+0)-E(-0))} = 0$ (см. доказательство теоремы 2 из [1]). Поэтому сужение $\theta_\alpha(\zeta)$ на $\mathrm{Im}\,(E(+0) - E(-0))$ есть постоянный полуунитарный оператор, никак не связанный с A_{11}. Поскольку характеристическая функция вводится в основном для изучения оператора A_{11}, в дальнейшем для простоты можно считать

$$E(+0) = E(-0). \tag{8}$$

Тогда $L_+ = \mathrm{Ker}\, E(+0)$, $L_- = \mathrm{Im}\, E(-0)$, т. е. пространство L_2 и оператор J_L определяются по A_{11} с точностью до изоморфизма. Из результатов [1] легко выводится, что $\mathrm{Im}\, A_{21}$ восстанавливается по A_{11} с точностью до изоморфизма. Но $M_2 \ominus \overline{\mathrm{Im}\, A_{21}} = \mathrm{Ker}\, A_{21}^* = \mathrm{Ker}\, A_{21} A_{21}^* = \mathrm{Ker}\,(I - A_{22} J_L A_{22}^* J_M) = \mathrm{Ker}\,(I - A_{22} A_{22}^*) = \{0\}$.

Здесь использовано равенство $A_{21} A_{21}^* = I - A_{22} J_L A_{22}^* J_M$, являющееся одним из следствий J-унитарности оператора A, и равенство $A_{22} J_L A_{22}^* J_M = A_{22} A_{22}^*$, вытекающее из (5). Таким образом, второе из неизвестных пространств — M_2 — также определяется при ограничении (8) с точностью до изоморфизма.

Пусть Q_1 (Q_2) — оператор, осуществляющий унитарную эквивалентность сужения $A_{11} A_{11}^*$ на $\mathrm{Ker}\, D(+0)$, ($\mathrm{Im}\, D(-0)$) и сужения $A_{22}^* A_{22}$ на $\mathrm{Ker}\, E(+0)$ ($\mathrm{Im}\, E(-0)$); U_2 — частично изометрический множитель из полярного представления оператора A_{22}; U_1^* выполняет ту же роль для оператора A_{11}^*; Φ_1 унитарно отображает $\mathrm{Ker}\, A_{11}$ на $\mathrm{Ker}\, A_{22}^*$; Φ_2 унитарно отображает $\mathrm{Ker}\, A_{11}^*$ на

$\operatorname{Ker} A_{22}$. Существование операторов $\Phi_{1,2}$, $Q_{1,2}$ вытекает из теоремы 2. Произвол в построении J-унитарного расширения A_{11} состоит в выборе $\Phi_{1,2}$, $Q_{1,2}$ и U_2, при этом в силу условия (5)

$$U_2 J_L \big|_{\operatorname{Im} A_{22}^*} = J_M U_2 \big|_{\operatorname{Im} A_{22}^*}. \tag{9}$$

Из условия (5) заключаем также, что $\operatorname{Ker} A_{22}$ инвариантно относительно оператора J_L и, значит, приводит его. Поскольку $\operatorname{Ker} A_{22}$ — неотрицательное подпространство, то $\operatorname{Ker} A_{22} \subset L_+$. Отсюда

$$J_L \begin{pmatrix} \Phi_2 & & \\ & Q_1 & \\ & & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_2 & & \\ & Q_1 & \\ & & -Q_2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Аналогично доказывается, что $\operatorname{Ker} A_{22}^* \subset M_+$ и, значит,

$$J_M \begin{pmatrix} \Phi_1 & \\ & U_2 \begin{pmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \\ & U_2 \begin{pmatrix} Q_1 & \\ & -Q_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Обратно, из соотношений (9) — (11) вытекает, что

$$A_{22} J_L = \begin{pmatrix} 0 & \\ & U_2 \begin{pmatrix} \sqrt{A_{11} A_{11}^*}\big|_{\operatorname{Ker} D(+0)} Q_1 & \\ & -\sqrt{A_n A_{11}^*}\big|_{\operatorname{Im} D(-0)} Q_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= J_M A_{22}.$$

Итак, если оператор TJ_L-эрмитов и условие (9) выполнено, то равенство (5) сводится к двум дополнительным требованиям:

$$\operatorname{Im} \Phi_1 \subset M_+, \quad \operatorname{Im} \Phi_2 \subset L_+. \tag{12}$$

На основании результатов [1] устанавливается, что оператор A_{12} определен с точностью до правого множителя

$$\begin{pmatrix} \Phi_2^* & \\ & Q_2^* \end{pmatrix}, \tag{13}$$

а A_{21} — с точностью до левого множителя

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & \\ & U_2 Q U_1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Здесь $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{pmatrix}$.

Иначе говоря, второе слагаемое в (7) можно записать в виде произведения трех множителей, из которых правый есть (13), левый — (14), а средний представляет собой оператор, действующий в L_1 и записанный в виде блок-матрицы, отвечающей представлению L_1 как области определения — в виде $\operatorname{Ker} A_{11}^* \oplus \overline{\operatorname{Im} A_{11}}$, а как области изменения — в виде $\operatorname{Ker} A_{11} \oplus \overline{\operatorname{Im} A_{11}^*}$. Существенно, что все блоки среднего множителя однозначно определяются оператором A_{11}. Тому же разбиению L_1 в ортогональные суммы отвечает представление

$$A_{22} = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \\ & U_2 Q U_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \\ & U_1^* \sqrt{A_{11} A_{11}^*}\big|_{\mathrm{Im}\, A_{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_2 & \\ & Q^* \end{pmatrix},$$

проверяемое непосредственно.

Подставим это в (7):

$$\theta_\alpha(\zeta) = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \\ & U_2 Q U_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{11}(\zeta) & \theta_{12}(\zeta) \\ \theta_{21}(\zeta) & \theta_{22}(\zeta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_2^* & \\ & Q^* \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Здесь $\theta_{ij}(\zeta)$ — оператор-функции, однозначно определяемые по оператору A_{11}; $\Phi_{1,2}$, $U_{1,2}$ и Q описаны выше, $\Phi_{1,2}$ подчинены дополнительному условию (12), а U_2 — условию (9).

Равенство (15) описывает класс всех характеристических функций узла α, удовлетворяющих соотношению (5) при естественном ограничении (8).

Список литературы: **1.** *Спитковский И. М.* О блочной структуре I-унитарных операторов.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 30. Харьков, 1978, с. 129—138. **2.** *Крейн М. Г., Лангер Г. К.* О спектральной функции самосопряженного оператора в пространстве с индефинитной метрикой. ДАН СССР, 1963, т. 152, № 1, с. 39—42. **3.** *Гинзбург Ю П., Иохвидов И. С.* Исследования по геометрии бесконечномерных пространств с билинейной метрикой.— «Усп. мат. наук», 1962, т. 17, вып. 4, с. 3—56. **4.** *Крейн М. Г.* Введение в геометрию индефинитных J-пространств и теорию операторов в этих пространствах.— Вторая летняя мат. школа (Кацивели, июнь — июль 1964), 1. Киев, «Наукова думка», 1965, с. 15—92. **5.** *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., «Наука», 1965. 448 с. **6.** *Бродский В. М.* Об операторных узлах и их характеристических функциях.—ДАН СССР, 1971, т. 198. № 1, с. 16—19. **7.** *Бродский В. М., Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* О характеристических функциях обратимого оператора.— «Acta Sci. Math.» Szeged, 1971, т. 32, с. 141—164.

Поступила 5 апреля 1974 г.