УДК 517.51

Н. Д. РЫЩЕНКО

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПОЛИНОМАМИ УОЛША — ПЭЛИ

Пусть $f(x) \in L_p[0, 1]$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Рассмотрим известную ортонормированную на $[0, 1]$ систему Уолша — Пэли $\{\varphi_\nu(x)\}$. Функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье — Уолша: $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x)$.

Нам понадобятся следующие известные утверждения.

1. (См. [1]). Рассмотрим некоторую периодическую группу R, элементами которой являются последовательности $\tilde{x}=\{x_s\}$ ($s=1, 2, \ldots$), такие, что $x_s=0$ или 1 с операцией сложения по модулю 2, эта операция обозначается через $\dot{+}$. Каждому элементу $\tilde{x}=\{x_s\}$ из R поставим в соответствие вещественное число $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}$, лежащее на отрезке [0, 1]. Это соответствие будет однозначным, если двоично-рациональные точки считать дважды, а именно, как правый и левый концы двух соседних интервалов с общим двоично-рациональным концом. При этом полагаем, что правому концу интервала соответствует бесконечное разложение $\tilde{x}$, а левому — конечное. Функция $f(x)\in L_p(R)$ ($1<p<\infty$), если

$$\|f(x)\|_{L_p}=\left\{\int\limits_R |f(x)|^p dx\right\}^{1/p}=\left\{\int\limits_0^1 |f(x)|^p dx\right\}^{1/p}<\infty.$$

В работе [1] вводится понятие сильной производной функции $f\in L_p(R)$ следующим образом.

Определение. *Если для функции $f\in L_p(R)$ существует $g\in L_p(R)$, такая, что*

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m}2^j\,[f(\cdot)-f(\cdot\dot{+}e_{j+1})]-g(\cdot)\right\|_{L_p(R)}=0,$$

где для фиксированного $j=1, 2, \ldots$ $e_j=\{x_s^j\}$, $x_s^j=0$ для $j\neq s$, $x_s^j=1$ для $j=s$, тогда $g(x)$ называется сильной производной от f и обозначается $D^{[1]}f$.

Для любого $k\in 1, 2, \ldots$ k-я сильная производная от f определяется соответственно $D^{[1]}(D^{[k-1]}f)=D^{[k]}f$.

Известна следующая теорема (см. [1]). Если для $f\in L_p(R)$ существует $D^{[k]}f\in L_p(R)$ для некоторого $k\in 1, 2, \ldots$, тогда

$$c_\nu^{(k)}(f)=\nu^k c_\nu(f),$$

где $c_\nu^{(k)}(f)$ — коэффициент Фурье — Уолша функции $D^{[k]}f$, а $c_\nu(f)$ — коэффициент Фурье — Уолша f, т. е. ряд Фурье — Уолша функции f можно почленно дифференцировать в указанном смысле и

$$D^{[k]}f\sim\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^k c_\nu(f)\,\varphi_\nu(x). \qquad (1)$$

2. Для полиномов по системе Уолша справедливо неравенство Никольского. Если $1\leqslant q<q'\leqslant\infty$, то

$$\|P_n(x)\|_{L_{q'}}\leqslant cn^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}\right)}\|P_n(x)\|_{L_q}. \qquad (2)$$

Доказательство проводится так же, как для тригонометрических полиномов (см. [2]).

3. Неравенство Конюшкова — Стечкина имеет вид (см. [3])

$$E_n(f)_{L_\gamma} \leqslant c\left\{E_n(f)_{L_1} n^{1-\frac{1}{\gamma}} + \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{-\frac{1}{\gamma}} E_\nu(f)_{L_1}\right\} (1 < \gamma < \infty). \quad (3)$$

4. Известно числовое неравенство (см. [4, с. 308]):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-c}(d_n + d_{n+1} + \ldots)^p \leqslant M \sum_{n=1}^{\infty} n^{-c}(nd_n)^p \, (p > 1,\ c < 1). \quad (4)$$

В настоящей заметке устанавливается следующая

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ *и при* $q > p$ *для некоторого натурального* k *выполнено условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\left(k+\frac{1}{p}\right)-2} E_{n-1}^q(f)_{L_p} < \infty.$$

Тогда функция f *имеет сильную производную порядка* k, $D^{[k]}f \in L_q$ *и*

$$E_n(D^{[k]}f)_{L_q} \leqslant c_{q,p,k}\left\{n^{k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} E_{n-1}(f)_{Lp} + \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{q\left(k+\frac{1}{p}\right)-2} E_\nu^q(f)_{L_p}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}, \quad (5)$$

где $E_n(f)_{L_p}$ — *наилучшее приближение функции* f *полиномами по системе Уолша — Пэли в метрике* L_p.

Для случая тригонометрической системы при $k = 0$ теорема 1 установлена П. Л. Ульяновым (см. [5]), а для любого натурального k — М. Ф. Тиманом (см. [6], с. 73, т. 8). При доказательстве теоремы 1 используется методика, указанная М. Ф. Тиманом в [6].

Доказательство. Пусть $1 < p < q \leqslant 2$. Запишем частную сумму ряда (1) в виде

$$\| s_{2^N-1}(D^{[k]}f;\ x)\|_{L_q}^q = \left\| \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{l=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} l^k c_\nu \varphi_\nu(x) \right\|_{L_q}^q = \left\| \sum_{\nu=1}^{N} \Delta_\nu \right\|_{L_q}^q,$$

где

$$\Delta_\nu = \sum_{l=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} l^k c_l \varphi_l(x).$$

В силу неравенства Пэли (см. [7]) и неравенства Минковского получим

$$\left\| s_{2^N-1}(D^{[k]}f;\ x)\right\|_{L_q}^q \leqslant M_q \sum_{\nu=1}^{N} \| \Delta_\nu \|_{L_q}^q. \quad (6)$$

Согласно (2) имеем

$$\| S_{2^N-1}(D^{[k]}f;\ x)\|_{L_q} \leqslant M'_q \left\{\sum_{\nu=1}^{N} 2^{\nu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|\Delta_\nu\|_{L_p}^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя преобразование Абеля, получим

$$\|\Delta_\nu\|_{L_p} \leqslant c_p 2^{\nu k} E_{2^{\nu-1}-1}(f)_{L_p}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) имеем

$$\| s_{2^N-1}(D^{[k]}f;\ x)\|_{L_q} \leqslant M_{q,p}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\left(\frac{1}{p}+k\right)-2} E_{n-1}^q(f)_{L_p}\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Устремив $N \to \infty$, получаем

$$\| D^{[k]}f\|_{L_q} \leqslant M_{q,p}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\left(\frac{1}{p}+k\right)-2} E_{n-1}^q(f)_{L_p}\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{8}$$

Пусть $p=1$ $p<q\leqslant 2$. Выберем $1<\gamma<q$ и из (8) запишем

$$\| D^{[k]}f\|_{L_q}^q \leqslant M_{q,p}^q\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\left(\frac{1}{\gamma}+k\right)-2} E_{n-1}^q(f)_{L_\gamma}\right\}.$$

Применяя неравенства (3) и (4), получим

$$\| D^{[k]}f\|_{L_q}^q \leqslant M_{q,p}^q\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\left(\frac{1}{p}+k\right)-2} E_{n-1}^q(f)_{L_p}\right\}.$$

Пусть $2\leqslant p<q<\infty$. Рассмотрим частную сумму ряда (1)

$$\| s_{2^N-1}(D^{[k]}f;\ x)\|_{L_q}^q = \left\|\sum_{\nu=1}^{N}\Delta_\nu\right\|_{L_q}^q.$$

Положим $r=[p]+1$, $\delta_\nu = |\Delta_\nu|^{q/r}$. Тогда

$$\| s_{2^N-1}(D^{[k]}f;\ x)\|_{L_q}^q \leqslant \sum_{\nu_1=1}^{N}\ldots\sum_{\nu_r=1}^{N}\delta_{\nu_1}\ldots\delta_{\nu_r}dx.$$

Далее, поступая так же, как и в [6, с. 63], приходим к оценке:

$$\rho_{\mu,\nu} \leqslant M_{q,p} 2^{-(\nu-\mu)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)} \sigma_\mu^{\frac{1}{2}} \sigma_\nu^{\frac{1}{2}} \quad (\nu=1,\ 2,\ \ldots\ \mu=1,\ 2,\ \ldots\ \mu<\nu),$$

где

$$\rho_{\mu,\nu} = \int_0^1 (\delta_\mu\delta_\nu)^{r/2}dx = \int_0^1 |\Delta_\mu\Delta_\nu|^{q/2}dx,$$

$$\sigma_\mu = \sum_{l=2^{\mu-2}}^{2^{\mu-1}-1} l^{q\left(\frac{1}{p}+k\right)-2} E_l^q(f)_{L_p},\quad \sigma_1 = E_0(f)_{L_p}.$$

С помощью этих оценок получаем, что

$$\| s_{2^N-1}(D^{[k]}f;\ x)\|_{L_q}^q \leqslant M''_{p,q}\sum_{n=1}^{\infty} E_{n-1}^q(f)_{L_p} n^{q\left(\frac{1}{p}+k\right)-2}.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем

$$\| D^{[k]} f \|_{L_q}^q \leqslant M''_{p,q} \sum_{n=1}^{\infty} E_{n-1}^q (f)_{L_p} n^{q\left(\frac{1}{p}+k\right)-2}. \qquad (9)$$

Аналогично устанавливаем, что

$$E_n (D^{[k]} f)_{L_q} \leqslant c_{p,q,k} \left\{ n^{k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} E_{n-1}(f)_{L_p} + \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} E_\nu^q (f)_{L_p} \nu^{q\left(k+\frac{1}{p}\right)-2} \right)^{1/q} \right\}.$$

Пусть теперь $1 \leqslant p \leqslant 2$ $2 < q < \infty$. Применяя (9) при $p = 2$, теорему 3 из [6] и неравенство (4), имеем

$$\| D^{[k]} f \|_{L_q}^q \leqslant M'''_q \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{q\left(k+\frac{1}{p}\right)-2} E_n^q (f)_{L_p} \right\}.$$

Теорема 1 доказана.

Пусть $L_p^{(k)}$ $(1 \leqslant p < \infty)$ означает пространство всех измеримых функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_k)$, удовлетворяющих условию

$$\| f \|_{L_p^{(k)}} = \left\{ \int_{Q_k} | f(x) |^p dx \right\}^{1/p} < \infty,$$

где

$$Q_k \text{ — куб } (0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, k), \quad dx = \prod_{i=1}^{k} dx_i.$$

Смешанную сильную частную производную функции f порядка r_i по переменной x_i $(i = 1, 2, \ldots k)$ определим, как

$$D_{x_1 \ldots x_k}^{[r_1 + \ldots + r_k]} f = D_{x_1}^{[r_1]} D_{x_2}^{[r_2]} \ldots D_{x_k}^{[r_k]} f.$$

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in L_p^{(k)}$ $(1 \leqslant p < \infty)$ и при $q > p$ для некоторого натурального r выполнено условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{qk\left(\frac{r}{k}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1} E_{n-1 \ldots n-1}^q (f)_{L_p^{(k)}} < \infty.$$

Тогда функция f имеет смешанную сильную производную порядка $r = r_1 + \ldots + r_k$,

$$D_{x_1 \ldots x_k}^{[r_1 + \ldots + r_k]} \in L_q^{(k)} \quad и \quad E_{n \ldots n} \left(D_{x_1 \ldots x_k}^{[r_1 + \ldots + r_k]} f \right)_{L_q^{(k)}} \leqslant$$

$$\leqslant c_{q,p,r_1,\ldots,r_k} \left\{ n^{k\left(\frac{r}{k}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} E_{n \ldots n} (f)_{L_p^{(k)}} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{kq\left(\frac{r}{k}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1} E_{\nu \ldots \nu} (f)_{L_p^{(k)}} \right)^{1/q} \right\}.$$

Теорема 2 доказывается тем же методом, что и теорема 1.

Список литературы: 1. *Butzer P. L. Wagner H. J.* Walsh — Fourier Series and the Concept Derivatiwe. — «Appl. Anal.», 1973, vol. 3, p. 29—46. 2. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференциальных функций многих переменных. — «Труды маг. ин-та им. В. А. Стеклова», 1951, т. 38, с. 244—278. 3. *Конюшков А. А.* Наилучшее приближение тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье.— «Мат. сб.», 1958, т. 44, № 86, с. 244—278. 4. *Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. М., ИЛ, 1948. 186 с. 5. *Ульянов П. Л.* Вложения некоторых классов функции H_p^ω — «ИАН СССР». Сер. мат., 1968, т. 32, № 3, с. 649—689. 6. *Тиман М. Ф.* О вложении L_p^k классов функции.— «Изв. вузов». 1974, № 10, с. 61—74. 7. *Paley R.* A remarkabbe series of orthogonal functions.— «London Math. Soc.», 1932, vol. 34, p. 241—279.

Поступила 25 ноября 1974 г.