УДК 513.88

Е. М. РУССАКОВСКИЙ

ОПЕРАТОРНАЯ ТРАКТОВКА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ, РАЦИОНАЛЬНО ВХОДЯЩИМ В ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ. II

5. Применение теории J-самосопряженных операторов в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$.

Приведем некоторые сведения из теории гильбертовых пространств с индефинитной метрикой (см., например, [1, 2 и 3, с. 255—264]).

Пусть H — гильбертово пространство с дефинитной метрикой $(\cdot, \cdot)_H$ и с индефинитной метрикой $<\cdot, \cdot>_H$. Если $(\forall x, y \in H) <x, y>_H = (Jx, y)_H$, где J — одновременно самосопряженный и унитарный оператор в H, то метрика $<\cdot, \cdot>_H$ называется J-метрикой. Будем предполагать, что метрика $<\cdot, \cdot>_H$ является J-метрикой. Если $<x, x>_H > 0$ (соответственно $<x, x>_H < 0$, $<x, x>_H = 0$), то вектор $x \in H$ называется положительным (соответственно отрицательным, нейтральным). Линеал $N \subset H$ называется неотрицательным (соответственно неположительным, положительным, отрицательным, нейтральным), если $(\forall x \in N, x \neq 0)$ $<x, x>_H \geqslant 0$ (соответственно $<x, x>_H \leqslant 0$, $<x, x>_H > 0$, $<x, x>_H < 0$, $<x, x>_H = 0$). Векторы $x, y \in H$ называются J-ортогональными, если $<x, y>_H = 0$. Естественно определяется J-ортогональность вектора x и линеала N и двух линеалов — N_1 и N_2. Подпространство $N^{<\perp>H}$, состоящее из всех векторов $x \in H$, J-ортогональных линеалу N, называется J-ортогональным дополнением линеала N. Если $N \cap N^{<\perp>H} = \{0\}$, то линеал N называется невырожденным. Два линеала N_1 и N_2 называются кососвязанными, если $N_1 \cap N_2^{<\perp>H} = N_1^{<\perp>H} \cap N_2 = \{0\}$. Кососвязанность нейтральных линеалов N_1 и N_2 эквивалентна невырожденности $N_1 \oplus N_2$.

Для любого линейного оператора V с плотной (по норме $\|\cdot\|_H = (\cdot, \cdot)_H^{1/2}$) в пространстве H областью определения D_V существует оператор $V^c = JV^*J$, называемый J-сопряженным для оператора V: $(\forall x \in D_V, y \in D_{V^c})$ $<Vx, y>_H = <x, V^c y>_H$. Если $V \subset V^c$, т. е. $(\forall x, y \in D_V)$ $<Vx, y>_H = <x, Vy>_H$, то оператор V называется J-симметрическим. Если $V = V^c$, т. е. $D_V = D_{V^c}$ и $(\forall x, y \in D_V (= D_{V^c}))$ $<Vx, y>_H = <x, Vy>_H$, то оператор V называется J-самосопряженным.

Обозначим через $S_{\tilde\lambda}$ корневое подпространство оператора V, отвечающее с. з. $\tilde\lambda$. С. з. $\tilde\lambda$ оператора V называется нормальным, если $\dim S_{\tilde\lambda} < \infty$ и H есть прямая сумма $S_{\tilde\lambda}$ и некоторого инвариантного для V подпространства, на котором оператор $V - \tilde\lambda I$ обратим.

Начиная с этого момента будем предполагать, что ранг индефинитной метрики $<\cdot, \cdot>_H$ конечен $(\varkappa = \dim[(I-J)H] < \infty)$, т. е. что пространство H с индефинитной метрикой $<\cdot, \cdot>_H$ является пространством Понтрягина $\Pi_\varkappa$. Пусть V — J-симметрический оператор в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$; $\tilde{\lambda}$ — его с. з., которому отвечают s цепочек из собственной и присоединенных к ней функций, причем длина k-й цепочки равна d_k. При вещественном $\tilde{\lambda}$ обозначим через $\rho(\tilde{\lambda})$ сумму $\sum\limits_{k=1}^{s} [d_k/2]$, при невещественном $\tilde{\lambda}$ обозначим через $\rho(\tilde{\lambda})$ сумму $\sum\limits_{k=1}^{s} d_k$, т. е. $\dim S_{\tilde{\lambda}}$. Нам понадобится следующая теорема Л. С. Понтрягина [4, теорема 3]:

Теорема. *Пусть V — J-симметричный оператор в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$ — произвольная система с. з. оператора V, не содержащая никаких комплексно-сопряженных друг другу с. з. Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\lambda_k) \leqslant \varkappa$.

Нам понадобится также теорема Т. Я. Азизова и И. С. Иохвидова [5], ослабленный вариант которой сформулируем следующим образом:

Теорема. *Пусть V — J-самосопряженный вполне непрерывный оператор в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$, причем $\lambda = 0$ не является с. з. оператора V. Тогда система всех с. и п. векторов оператора V полна в $\Pi_\varkappa$ и образует базис Рисса в $\Pi_\varkappa$.*

Заметим теперь, что оператор J: $\boldsymbol{L}^2(0, 1) \to \boldsymbol{L}^2(0, 1)$, действующий по правилу $J\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{v}^\wedge = \boldsymbol{u}^\wedge$, $\boldsymbol{v}_i^\wedge = \boldsymbol{u}_i^\wedge \cdot A_i \cdot |A_i|^{-1}$ $(i = 0, 1)$, является одновременно самосопряженным и унитарным оператором в пространстве $\boldsymbol{L}^2(0, 1)$, причем $(\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(0, 1))$ $(J\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>$. Таким образом, метрика (4) — J-метрика конечного ранга $\varkappa$.

Теорема 4 (о спектральных свойствах оператора $\boldsymbol{T}$ и о базисных свойствах системы всех с. и п. векторов оператора $\boldsymbol{T}$). *Справедливы следующие утверждения:* а) *оператор $\boldsymbol{T}$ — J-самосопряженный оператор в пространстве $\boldsymbol{L}^2(0, 1)$;* б) *для любой системы $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\omega}$ $(\omega \leqslant \infty)$ с. з. с неотрицательными мнимыми частями $\sum\limits_{k=1}^{\omega} \rho(\lambda_k) \leqslant \varkappa$. Кратных и невещественных с. з. может быть лишь конечное число. Оператор $\boldsymbol{T}$ может иметь не более $2\varkappa$ невещественных с. з., не более $\varkappa$ кратных вещественных с. з., не более $2[\varkappa/2]$ кратных невещественных с. з.; невещественное с. з. может иметь кратность не более $\varkappa$, вещественное с. з. — не более $2\varkappa + 1$;* в) *при $\lambda' \neq \overline{\lambda''}$ подпространства $S_{\lambda'}$ и $S_{\lambda''}$ J-ортогональны. При вещественном $\tilde{\lambda}$ $S_{\tilde{\lambda}}$ невырожденное. При невещественном $\tilde{\lambda}$ $S_{\tilde{\lambda}}$ нейтраль-*

но, $S_{\tilde{\lambda}}$ и $S_{\bar{\tilde{\lambda}}}$ *кососвязаны. Каждое с. з. оператора* $\boldsymbol{T}$ *является нормальным;* г) *система всех с. и п. векторов оператора* $\boldsymbol{T}$ *полна в пространстве* $\boldsymbol{L}^2$ (0, 1) *и образует базис Рисса в* $\boldsymbol{L}^2$ (0, 1).

Доказательство. а) Проверяется прямым вычислением оператора $\boldsymbol{T}^c$. б) $\sum_{k=1}^{\omega} \rho(\lambda_k) \leqslant \varkappa$ — следствие приведенной выше теоремы Л. С. Понтрягина; из этого соотношения, а также из того, что каждому с. з. оператора $\boldsymbol{T}$ отвечает ровно одна цепочка из собственного и присоединенных к нему векторов, следует справедливость всех остальных оценок пункта б) теоремы 4.

в) Пусть $\tilde{\lambda}$ — регулярная точка оператора $\boldsymbol{T}$. Напомним, что $\boldsymbol{L}^2(0, 1)$ — пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$, в котором наряду с индефинитной метрикой задана дефинитная метрика, и что по теореме 2 оператор $(\boldsymbol{T} - \tilde{\lambda} I)^{-1}$ существует и является вполне непрерывным оператором в $\Pi_\varkappa$. Нетрудно проверить, что оператор $(\boldsymbol{T} - \tilde{\lambda} I)^{-1}$ J-самосопряжен в $\Pi_\varkappa$. С. з. $\{\mu_n\}_{n=1}^{\omega}$ ($\omega \leqslant \infty$; на самом деле $\omega = \infty$, но здесь это несущественно) оператора $(\boldsymbol{T} - \tilde{\lambda} I)^{-1}$ связаны с с. з. $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\omega}$ оператора $\boldsymbol{T}$ соотношениями $\mu_n = 1/(\lambda_n - \tilde{\lambda})$ $(1 \leqslant n \leqslant \omega)$; $\mu = 0$ не является с. з. оператора $(\boldsymbol{T} - \tilde{\lambda} I)^{-1}$. Корневые подпространства операторов $\boldsymbol{T}$ и $(\boldsymbol{T} - \tilde{\lambda} I)^{-1}$, отвечающие соответственным с. з. μ_n и λ_n, совпадают. По приведенной выше теореме Т. Я. Азизова и И. С. Иохвидова, система всех с. и п. векторов оператора $(\boldsymbol{T} - \tilde{\lambda} I)^{-1}$ (значит, и оператора $\boldsymbol{T}$) полна в $\Pi_\varkappa$ и является базисом Рисса в $\Pi_\varkappa$.

Следствие. Система всех с. и п. функций задачи (1) в пространстве $L^2(0, 1)$ полна, но не минимальна, даже ω — линейно зависима, и есть ровно $r(0) + r(1)$ линейно независимых рядов по этим функциям, сходящихся к нулю в метрике пространства $L^2(0, 1)$.

Действительно, согласно результатам пункта г) теоремы 4 всякий элемент пространства $\boldsymbol{L}^2(0, 1)$ единственным образом разлагается в ряд по с. и п. векторам оператора $\boldsymbol{T}$, сходящийся по норме пространства $\boldsymbol{L}^2(0, 1)$. Сформулированное в следствии утверждение нетрудно доказать, если разложить в указанный ряд $r(0) + r(1)$ векторов $(\mathbf{0};\ 1, 0, \ldots, 0;\ 0, 0, \ldots, 0)$, $(\mathbf{0};\ 0, 1, \ldots, 0;\ 0, 0, \ldots, 0)$, ..., $(\mathbf{0};\ 0, 0, \ldots, 0;\ 0, 0, \ldots, 1)$ и рассмотреть в пространстве $L^2(0, 1)$ первые компоненты этих рядов.

6. **Примеры.** Рассмотрим задачу (1) в случае, когда $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$ на отрезке $[0, 1]$, $P_i(\lambda) \equiv 1$, $Q_i(\lambda) = Q(\lambda)$ $(i = 0, 1)$:

$$\left.\begin{array}{l} -u''(x) = \lambda u(x), \ x \in (0, 1) \\ u'(i) + Q(\lambda) u(i) = 0 \quad (i = 0, 1) \end{array}\right\} \qquad (8)$$

(см. примеры 1—4). Для задачи (8)

$$\omega(\lambda) = -\sin\sqrt{\lambda}\cdot(Q^2(\lambda)+\lambda)/\sqrt{\lambda},$$

множество Λ всех с. з. можно представить в виде объединения двух непересекающихся множеств Λ_+ и Λ_-, где $\Lambda_+ = \{\pi^2 n^2\}_{n=1}^{\infty}$ — множество всех простых положительных с. з., а Λ_- — множество всех корней многочлена $Q^2(\lambda)+\lambda$ с учетом кратности — множество всех неположительных и невещественных (возможно, кратных) с. з. Для задачи (8) $\varkappa$ равен степени многочлена $Q(\lambda)$ (см. пункт в) леммы).

Пример 1.

$$\left.\begin{aligned} &-u''(x) = \lambda u(x),\ x\in(0,\ 1)\\ &u'(i) + \frac{1-\lambda}{4}u(i) = 0\ (i=0,\ 1)\end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Для задачи (9) $Q(\lambda) = (1-\lambda)/4$, $\varkappa = 1$, $\Lambda = \Lambda_+ \cup \{-7+4\sqrt{3}, -7-4\sqrt{3}\}$; все с. з. простые вещественные; $(\forall\lambda\in\Lambda)\ \rho(\lambda) = 0$.

Пример 2.

$$\left.\begin{aligned} &-u''(x) = \lambda u(x),\ x\in(0,\ 1)\\ &u'(i) + \frac{1-\lambda}{2}u(i) = 0\ (i=0,\ 1)\end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Для задачи (10) $Q(\lambda) = (1-\lambda)/2$, $\varkappa = 1$, $\Lambda = \Lambda_+ \cup \{-1, -1\}$; $\lambda = -1$ — двукратное вещественное с. з., $\rho(-1) = 1\ (=\varkappa)$. Оператор $\boldsymbol{T}$ имеет ровно $\varkappa$ кратных вещественных с. з. (см. пункт б) теоремы 4).

Пример 3.

$$\left.\begin{aligned} &-u''(x) = \lambda u(x),\ x\in(0,\ 1)\\ &u'(i) + (1-\lambda)u(i) = 0\ (i=0,\ 1)\end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

Для задачи (11) $Q(\lambda) = 1-\lambda$, $\varkappa = 1$, $\Lambda = \Lambda_+ \cup \{(1+i\sqrt{3})/2, (1-i\sqrt{3})/2\}$; $\lambda = (1+i\sqrt{3})/2$ и $\lambda = (1-i\sqrt{3})/2$ — пара простых невещественных с. з., $\rho[(1+i\sqrt{3})/2] = \rho[(1-i\sqrt{3})/2] = 1\ (=\varkappa)$. Оператор $\boldsymbol{T}$ имеет ровно $2\varkappa$ невещественных с. з.; каждое из невещественных с. з. имеет алгебраическую кратность ровно $\varkappa$ (см. пункт б) теоремы 4).

Пример 4.

$$\left.\begin{aligned} &-u''(x) = \lambda u(x),\ x\in(0,\ 1)\\ &u'(i) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\lambda^3 - \frac{\sqrt{2}}{8}\lambda^2 - \frac{5\sqrt{2}}{8}\lambda + \frac{3\sqrt{2}}{8}\right)u(i) = 0\ (i=0,1)\end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Для задачи (12) $Q(\lambda) = -\frac{\sqrt{2}}{8}\lambda^3 - \frac{\sqrt{2}}{8}\lambda^2 - \frac{5\sqrt{2}}{8}\lambda + \frac{3\sqrt{2}}{8}$, $\varkappa = 3$, $\Lambda = \Lambda_+ \cup \{i,\ i,\ -i,\ -i,\ -1+2\sqrt{2}i,\ -1-2\sqrt{2}i\}$, $\lambda = i$ и $\lambda = -i$ — пара двукратных невещественных с. з.; $\lambda = -1+2\sqrt{2}i$ и $\lambda = -1-2\sqrt{2}i$ — пара простых невещественных с. з.;

$\rho(i)=\rho(-i)=2$, $\rho(-1+2\sqrt{2}i)=\rho(-1-2\sqrt{2}i)=1$. Оператор $\boldsymbol{T}$ имеет ровно $2[\varkappa/2]$ кратных невещественных с. з. (см. пункт б) теоремы 4).

Заметим, что если $W(\lambda)=W_1^m(\lambda)+W_2(\lambda)$, где $W_1(\lambda)$ — многочлен степени n, $W_2(\lambda)$ — многочлен степени, не превосходящей $mn-l$, то у многочлена $W(\lambda)$ не может быть корня кратности более $mn-l+1$. Для многочлена $W(\lambda)=Q^2(\lambda)+\lambda$ $m=2$, $mn-l=1$, $mn-l+1=2$. Таким образом, у задачи (8) не может быть с. з. кратности более двух.

Приведем примеры, в которых с. з. имеет алгебраическую кратность более двух.

Пример 5.

$$\left.\begin{aligned}&-u''(x)=\lambda u(x),\ x\in(0,\ 1)\\&u'(0)+\frac{t}{t+1}u(0)=0\\&u'(1)+\left(\frac{t+1}{5t+6}\lambda+t\right)u(1)=0\end{aligned}\right\},\tag{13}$$

где t — корень уравнения $5t^3+21t^2+30t+15=0$ $(-2<t<-1)$.

Для задачи (13) $\varkappa=1$, $\lambda=0$ — трехкратное вещественное с. з.; $\rho(0)=1\,(=\varkappa)$, остальные с. з. простые вещественные (см. пункт б) теоремы 4). Оператор $\boldsymbol{T}$ имеет вещественное с. з. кратности ровно $2\varkappa+1$ (см. пункт б) теоремы 4).

Пример 6.

$$\left.\begin{aligned}&-u''(x)=\lambda u(x),\ x\in(0,\ 1)\\&u'(0)+\left(-\frac{2}{15}\lambda^2\right)u(0)=0\\&u'(1)+\left(\frac{1}{5}\lambda^2+\lambda\right)u(1)=0\end{aligned}\right\}.\tag{14}$$

Для задачи (14) $\varkappa=2$, $\lambda=0$ — четырехкратное вещественное с. з.; $\rho(0)=2\,(=\varkappa)$, остальные с. з. простые вещественные (см. пункт б) теоремы 4).

В примерах 7 и 8 соответственно $\varkappa=0$ и $\varkappa=r(0)+r(1)$.

Пример 7.

$$\left.\begin{aligned}&-u''(x)=\lambda u(x),\quad x\in(0,\ 1)\\&\lambda u'(0)+(\lambda^2-1)u(0)=0\\&\lambda u'(1)+(1-\lambda^2)u(1)=0\end{aligned}\right\}.\tag{15}$$

Для задачи (15) $\varkappa=0$, так как рациональные функции $R_i(\lambda)=\lambda/(1-\lambda^2)$ $(i=0,\ 1)$ неванлинновские (см. теорему 3).

Пример 8.

$$\left.\begin{aligned}&-u''(x)=\lambda u(x),\quad x\in(0,\ 1)\\&\lambda u'(0)+(1-\lambda^2)u(0)=0\\&\lambda u'(1)+(\lambda^2-1)u(1)=0\end{aligned}\right\}.\tag{16}$$

Для задачи (16) $\varkappa=r(0)+r(1)=4$, так как рациональные функции $R_i(\lambda)=\lambda/(\lambda^2-1)$ $(i=0,\ 1)$ антиневанлинновские (см. замечание к теореме 3).

В случае $\varkappa = 0$ (см. теорему 3) метрика (4) дефинитна, $\boldsymbol{T}$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L}^2(0, 1)$, являющийся расширением с выходом из пространства симметрического минимального оператора T_0, порождаемого линейным дифференциальным выражением l в пространстве $L^2(0, 1)$; все с. з. оператора $\boldsymbol{T}$ простые вещественные, присоединенные векторы отсутствуют. В этом случае применима теория Наймарка—Штрауса расширений симметрических операторов до самосопряженных с выходом из данного гильбертова пространства в более широкое гильбертово пространство.

В случае $\varkappa > 0$ теория Наймарка—Штрауса неприменима, и возникает задача обобщения этой теории в направлении рассмотрения J_2-самосопряженных расширений данного J_1-симметрического оператора с выходом из данного пространства Понтрягина $\Pi_{\varkappa_1}$ в более широкое пространство Понтрягина $\Pi_{\varkappa_2}$, $\varkappa_2 \geqslant \varkappa_1$. Из работ в этом направлении нам известны лишь статьи М. Г. Крейна и Г. К. Лангера [6], в которых рассматривается выход из данного пространства Понтрягина $\Pi_\varkappa$ в более широкое пространство Понтрягина $\widetilde{\Pi}_\varkappa$ без изменения ранга индефинитности $\varkappa$.

В заключение приношу благодарность В. Э. Кацнельсону за постановку задачи, ценные советы и полезные обсуждения.

Список литературы: 1. *Крейн М. Г.* Введение в геометрию индефинитных J — пространств и теорию операторов в этих пространствах.— В кн.: Вторая летняя мат. школа. Киев, 1965, с. 15—92. 2. *Иохвидов И. С., Крейн М. Г.* Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой I.— «Труды Моск. мат. о-ва», 1956, т. V, с. 367—432. 3. Функциональный анализ. Под общей ред. С. Г. Крейна. Серия Спр. мат. б-ка. М., «Наука», 1972. 544 с. 4. *Понтрягин Л. С.* Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой.— «Изв. АН СССР. Сер. мат», 1944, т. 8, № 6, с. 243—280. 5. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Критерий полноты и базисности корневых векторов вполне непрерывного J-самосопряженного оператора в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$.— «Мат. исследования», 1971, т. 6, вып. 1, с. 158—161. 6. *Крейн М. Г., Лангер Г. К.* О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве $\Pi_\varkappa$.— «Функциональный анализ и его приложения», 1971, т. 5, вып. 2, с. 59—71.

Поступила 15 октября 1974 г.