УДК 517.512

С. З. РАФАЛЬСОН

РЯДЫ ФУРЬЕ—ЛЕЖАНДРА С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. В работе для функций класса $C[-1, 1]$ с неотрицательными коэффициентами Фурье по многочленам Лежандра устанавливается связь между коэффициентами Фурье—Лежандра, наилучшими приближениями функции, алгебраическими многочленами и некоторыми структурными свойствами функции. Ранее некоторые ряды из коэффициентов Фурье—Лежандра для функций того же класса рассматривались в работе [4].

2. Обозначения. $\{X_k(x)\}_0^\infty$ — ортонормированная на отрезке $[-1, 1]$ система многочленов Лежандра; $P_k(x) = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}\, X_k(x)$,

$k=0, 1, \ldots$; $\{c_k(f)\}_0^\infty$ — коэффициенты Фурье—Лежандра функции f; $S_n(f)=\sum_{k=0}^{n} c_k(f) X_k$ — n-я частичная сумма ряда Фурье—Лежандра функции f; $\tau_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} S_k(f)$ — сумма Валле—Пуссена функции f; $\sigma_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$ — сумма Фейера функции f; $\{J_k^{(\alpha,\beta)}(x)\}_0^\infty$ — ортонормированная с весом $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ на $[-1,1]$ система многочленов Якоби; $E_n(f)$ — наилучшее приближение f алгебраическими многочленами степени не выше n в $C[-1, 1]$; $\Phi(f;\ n)=\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} c_k(f)$; $f_t(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f\left(x\cos t+\sqrt{1-x^2}\sin t\cos\lambda\right)d\lambda$ — функция, введенная Г. В. Жидковым в работе [3]; $\|f\|$ всегда будет означать $\|f\|_{C[-1,1]}$; H_n — множество алгебраических многочленов степени не выше n; через C с выписанными в скобках аргументами будем обозначать положительные постоянные, зависящие от этих аргументов. Соотношение $a_n \sim b_n$ означает, что $\exists\, C_1,\ C_2>0$, такие, что $C_1 \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant C_2$.

3. Всюду в дальнейшем считаем, если не оговорено противное, что $f\in C[-1, 1]$, $c_k(f)\geqslant 0$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

Теорема 1. *Справедливо неравенство*

$$\|S_n(f)\|\leqslant\|f\|,\ n=0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Доказательство. Легко проверить, что

$$\tau_m(f)=S_m(f)+\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)\,c_{m+k}(f)\,X_{m+k}.$$

Поскольку $\|X_n\|=X_n(1)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, то при $m\geqslant n$

$$\|S_n(f)\|\leqslant\|\tau_m(f)\|. \tag{2}$$

Известно, что $\|\sigma_n\|_{C[-1,1]\to C[-1,1]}=0(1)$ (см. [2]), значит,

$$\|f-\tau_m(f)\|\leqslant C\cdot E_m(f). \tag{3}$$

Переходя к пределу при $m\to\infty$ в неравенстве (2), получаем требуемое.

Замечание. Неравенство (1) точное. Знак равенства достигается для $f\in H_n$, $c_k(f)\geqslant 0$ $(k=0, 1, \ldots, n)$.

Теорема 2. *Имеют место оценки*

$$E_n(f)\leqslant\|f-S_n(f)\|\leqslant C\cdot E_{\left[\frac{n}{2}\right]}(f). \tag{4}$$

Доказательство. Так как $\tau_{\left[\frac{n}{2}\right]}(f)\in H_n$, то

$$f-S_n(f)=f-\tau_{\left[\frac{n}{2}\right]}(f)+S_n\left(\tau_{\left[\frac{n}{2}\right]}(f)-f\right). \tag{5}$$

Нетрудно показать, что

$$f-\tau_{\left[\frac{n}{2}\right]}(f)=\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{2\left[\frac{n}{2}\right]-1}\left(\frac{k}{\left[\frac{n}{2}\right]}-1\right)c_k(f)\,X_k+\sum_{k=2\left[\frac{n}{2}\right]}^{\infty}c_k(f)\,X_k,$$

значит, к $f-\tau_{\left[\frac{n}{2}\right]}(f)$ применима оценка (1):

$$\left\|S_n\left(\tau_{\left[\frac{n}{2}\right]}(f)-f\right)\right\|\leqslant\left\|\tau_{\left[\frac{n}{2}\right]}(f)-f\right\|. \tag{6}$$

Из (5), (6) и (3) следует правое неравенство в (4). Левое неравенство очевидно. Теорема доказана.

Замечание. Из (4) следует, что если $f\in C[-1,\ 1]$, $c_k(f)\geqslant 0$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, то $\|f-S_n(f)\|\underset{n\to\infty}{\to}0$. Это утверждение, являющееся аналогом известной теоремы Пэли для тригонометрических косинус-рядов (см. [1, с. 277]), иным способом доказано в [4].

Теорема 3. *Если* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(f)\cdot k^{2r+\frac{1}{2}}<\infty$ $(r\geqslant 0$ *— целое), то при* $\left[\frac{n}{2}\right]\geqslant r$

$$\Phi(f;\ n)\leqslant C(r)\,n^{-2r-\frac{1}{2}}\left\|f^{(r)}-\left(f_{\frac{\pi}{n}}\right)^{(r)}\right\|. \tag{7}$$

Доказательство. Поскольку $\frac{dJ_k^{(\alpha,\ \beta)}(x)}{dx}=\sqrt{k(k+\alpha+\beta+1)}\times$ $\times J_{k-1}^{(\alpha+1,\ \beta+1)}(x)$, то r раз формально продифференцированный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(f)\,X_k(x)$ имеет вид $\sum\limits_{k=r}^{\infty}c_k(f)\left\{\prod\limits_{i=-r+1}^{r}(k+i)\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot J_{k-r}^{(r,\ r)}(x)$. Принимая во внимание то, что $\left\|J_n^{(r,\ r)}\right\|=0\left(n^{r+\frac{1}{2}}\right)$, в силу условия теоремы получим $f^{(r)}(x)=\sum\limits_{k=r}^{\infty}c_k(f)\left\{\prod\limits_{i=-r+1}^{r}(k+i)\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot J_{k-r}^{(r,\ r)}(x)$ равномерно в $[-1,\ 1]$. Пользуясь тем, что $c_k(f_t)=c_k(f)\,P_k(\cos t)$, $k=0,\ 1,\ \ldots$ (см. [3]), аналогичным путем получим равномерно в $[-1,\ 1]$

$$[f_t(x)]^{(r)}=\sum_{k=r}^{\infty}c_k(f)\cdot P_k(\cos t)\left\{\prod_{i=-r+1}^{r}(k+i)\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot J_{k-r}^{(r,\ r)}(x).$$

Запишем равенство

$$f^{(r)}(x)-[f_t(x)]^{(r)}=\sum_{k=r}^{\infty}c_k(f)\,[1-P_k(\cos t)]\cdot\left\{\prod_{i=-r+1}^{r}(k+i)\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times J_{k-r}^{(r,\ r)}(x). \tag{8}$$

Положим в (8) $x = 1$, $t = \frac{\pi}{n}$; замечая, что $1 - P_k(\cos t) \geqslant Ck^2t^2$ при $0 \leqslant kt \leqslant \pi$ (см. [3]),

$$\left\{\prod_{i=-r+1}^{r}(k+i)\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot J_{k-r}^{(r,\,r)}(1) \geqslant C(r)\,k^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{(k+r)!}{(k-r)!} \geqslant C(r)\,k^{2r+\frac{1}{2}},$$

получим

$$\| f^{(r)} - (f_t)^{(r)} \| \geqslant C(r)\,n^{-2} \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} k^{2r+\frac{5}{2}} c_k(f),$$

откуда сразу вытекает утверждение теоремы.

Следствие. В условиях теоремы 3 справедлива оценка

$$E_n(f) \leqslant C(r)(n+1)^{-2r} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-2rj} \| f^{(r)} - (f_{\pi\cdot 2^{-j-1}(n+1)^{-1}})^{(r)} \|. \quad (9)$$

Доказательство. Учитывая (4) и (7), имеем

$$E_n(f) \leqslant C \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(f)\,k^{\frac{1}{2}} = C \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=2^j(n+1)}^{2^{j+1}(n+1)} c_k(f)\,k^{\frac{1}{2}} \leqslant C \cdot n^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\frac{j}{2}} \Phi(f;\ 2^{j+1}(n+1)) \leqslant C \cdot n^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\frac{j}{2}} [2^{j+1}(n+1)]^{-2r-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \| f^{(r)} - (f_{\pi\cdot 2^{-j-1}(n+1)^{-1}})^{(r)} \| \leqslant C(n+1)^{-2r} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-2rj} \| f^{(r)} -$$

$$- (f_{\pi\cdot 2^{-j-1}(n+1)^{-1}})^{(r)} \|.$$

Теорема 4. *Если* $\sum_{j=0}^{\infty} 2^{\left(2r+\frac{1}{2}\right)j} \Phi(f;\ 2^{j+1}) < \infty$, *то* $\exists f^{(r)}$, $(f_t)^{(r)} \in C[-1,\ 1]$ и $\forall n = 1, 2, \ldots$

$$\| f^{(r)} - (f_t)^{(r)} \| \leqslant Ct^2 \sum_{j=1}^{n} 2^{\left(2r+\frac{5}{2}\right)j} \Phi(f;\ 2^j) + C \sum_{j=n}^{\infty} 2^{\left(2r+\frac{1}{2}\right)j} \Phi(f;\ 2^{j+1}). \quad (10)$$

Доказательство. Из условия теоремы легко следует, что $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\,k^{2r+\frac{1}{2}} < \infty$, значит, равномерно на $[-1,\ 1]$ сходится ряд $\sum_{k=r}^{\infty} c_k(f) \left\{\prod_{i=-r+1}^{r}(k+i)\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot J_{k-r}^{(r,\,r)}(x)$, полученный формальным r-кратным дифференцированием ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\,X_k(x)$. Отсюда по известной теореме анализа $\exists f^{(r)} \in C[-1,\ 1]$ и

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=r}^{\infty} c_k(f) \left\{\prod_{i=-r+1}^{r}(k+i)\right\}^{\frac{1}{2}} J_{k-r}^{(r,\,r)}(x).$$

Аналогично

$$(f_t)^{(r)}(x) = \sum_{k=r}^{\infty} c_k(f)\left\{\prod_{i=-r+1}^{r}(k+i)\right\}^{\frac{1}{2}} P_k(\cos t)\, J_{k-r}^{(r,\,r)}(x).$$

Далее,

$$\|f^{(r)} - (f_t)^{(r)}\| \leqslant C(r)\sum_{k=r}^{\infty} c_k(f)\cdot k^{2r+\frac{1}{2}}[1 - P_k(\cos t)] \leqslant$$

$$\leqslant C(r)\sum_{k=1}^{2^n} + C(r)\sum_{k=2^n+1}^{\infty} = S_1 + S_2.$$

Очевидно,

$$S_2 \leqslant C(r)\sum_{j=n}^{\infty}\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} c_k(f)\, k^{2r+\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C(r)\sum_{j=n}^{\infty} 2^{j\left(2r+\frac{1}{2}\right)}\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} c_k(f) \leqslant C(r)\sum_{j=n}^{\infty} 2^{j\left(2r+\frac{1}{2}\right)}\,\Phi(f;\ 2^{j+1}).$$

Оценивая S_1, примем во внимание, что $1 - P_k(\cos t) \leqslant Ck^2t^2$, получим

$$S_1 \leqslant Ct^2\sum_{k=1}^{2^n} c_k(f)\cdot k^{2r+\frac{5}{2}} \leqslant Ct^2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=2^{j-}}^{2^j} c_i(f)\, i^{2r+\frac{5}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant Ct^2\sum_{j=1}^{n} 2^{\left(2r+\frac{5}{2}\right)j}\sum_{i=2^{j-1}}^{2^j} c_i(f) = Ct^2\sum_{j=1}^{n} 2^{\left(2r+\frac{5}{2}\right)j}\,\Phi(f;\ 2^j). \qquad (12)$$

Из (11) и (12) вытекает утверждение теоремы.

Следствие из теорем 3 и 4. Для того чтобы $\|f^{(r)} - (f_t)^{(r)}\| = O(|t|^\alpha)$, $0 < \alpha < 2$, $r = 0, 1, \ldots$, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(f;\ n) = O\left(n^{-2r-\alpha-\frac{1}{2}}\right)$.

Замечание 1. В силу (10) из равенства $\Phi(f;\ n) = O\left(n^{-2r-\frac{5}{2}}\right)$ следует, что $\|f^{(r)} - (f_t)^{(r)}\| \leqslant Ct^2|\ln|t\|$. Покажем, что эта оценка неулучшаема по порядку. Возьмем $f(x) = -(1-x)^{r+1}\ln(1-x)$. С помощью формулы Родрига для многочленов Лежандра нетрудно проверить, что $c_n(f) > 0$ при $n > r+1$, $c_n(f) \sim n^{-2r-\frac{7}{2}}$, значит, для $g(x) = f(x) - S_{r+1}(f;\ x)$ $c_n(g) \geqslant 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $c_n(g) \sim n^{-2r-\frac{7}{2}}$, откуда $\Phi(g;\ n) \sim n^{-2r-\frac{5}{2}}$. С другой стороны,

$$g^{(r)}(x) = \sum_{k=r+2}^{\infty} c_k(f)\left\{\prod_{i=-r+1}^{r}(k+i)\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot J_{k-r}^{(r,\,r)}(x);$$

$$[g_t(x)]^{(r)} = \sum_{k=r+2}^{\infty} c_k(f)\, P_k(\cos t)\left\{\prod_{i=-r+1}^{r}(k+i)\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot J_{k-r}^{(r,\,r)}(x);$$

считая, что $\left[\frac{\pi}{|t|}\right] > (r+2)^2$ и принимая во внимание, что при $0 \leqslant kt \leqslant \pi$ $1 - P_k(\cos t) \geqslant Ck^2t^2$, получим

$$\|g^{(r)} - (g_t)^{(r)}\| \geqslant |g^{(r)}(1) - (g_t)^{(r)}(1)| \geqslant C \sum_{k=r+2}^{\infty} k^{-3}[1 - P_k(\cos t)] \geqslant$$

$$\geqslant Ct^2 \sum_{k=r+2}^{[\pi \cdot |t|^{-1}]} k^{-1} \geqslant Ct^2 |\ln|t||.$$

Теорема 5. *Справедливы неравенства*

$$\Phi(f;\ n) \leqslant C \cdot n^{-\frac{1}{2}} \cdot E_{\left[\frac{n}{2}\right]-1}(f),\quad n \geqslant 2; \tag{13}$$

$$E_n(f) \leqslant C \cdot n^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\frac{j}{2}}\, \Phi(f;\ 2^{j+1}(n+1)). \tag{14}$$

Доказательство ввиду простоты опустим.

Следствия из теорем 2—5.

1) Соотношения $E_n(f) = O(n^{-\beta})$, $\Phi(f;\ n) = O\left(n^{-\beta-\frac{1}{2}}\right)$, $\|f - S_n(f)\| = O(n^{-\beta})$ равносильны $\forall \beta > 0$.

2) При $r = 0, 1, \ldots, 0 < \alpha < 2$ соотношения $E_n(f) = O(n^{-2r-\alpha})$ и $\|f^{(r)} - (f_t)^{(r)}\| = O(|t|^{\alpha})$ равносильны.

Замечание 2. Нетрудно показать, что если $f \in L(-1, 1)$, $c_k(f) \geqslant 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$, $\Phi(f;\ n) = O\left(n^{-\frac{1}{2}-\alpha}\right)$, $0 < \alpha < 2$, то f эквивалентна $\varphi \in C[-1, 1]$, $\|\varphi - \varphi_t\| = O(|t|^{\alpha})$. С другой стороны, $\exists f \in L(-1, 1)$, такая, что $c_k(f) \geqslant 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$, $\Phi(f;\ n) = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$, но f не эквивалентна никакой $\varphi \in C[-1, 1]$. Действительно, возьмем $f_0(x) = -\ln(1 - x)$. Используя формулу Родрига для многочленов Лежандра и интегрируя n раз по частям, легко проверить, что $c_n(f_0) > 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $c_n(f_0) \sim n^{-\frac{3}{2}}$ и, значит, $\Phi(f_0;\ n) \sim n^{-\frac{1}{2}}$. В то же время ясно, что f_0 не эквивалентна никакой $\varphi \in C[-1, 1]$.

Приношу глубокую благодарность Г. И. Натансону и В. В. Жуку за ценные советы.

Список литературы: 1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М., Физматгиз, 1961. 2. *Gronwall T. H.* Über die Laplacesche Reihe.—«Math. Ann.», 1913, № 74, S. 213—270. 3. *Жидков Г. В.* Конструктивная характеристика одного класса непериодических функций.—ДАН СССР, т. 169, № 5, 1966. 4. *Жук В. В.* Об одном методе суммирования рядов Фурье. Ряды Фурье с положительными коэффициентами.—«Сб. науч. трудов ЛМИ, № 50, Л., 1965, с. 25—30.

Поступила 23 мая 1975 г.