УДК 517.9

О. А. ПЛАКСИНА

ХАРАКТЕРИСТИКА СПЕКТРОВ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Пусть L — оператор Штурма-Лиувилля

$$L[y] = -y''(x) + q(x)\, y(x) \tag{1}$$

с вещественным потенциалом $q(x)$, принадлежащим множеству $\widetilde{W}_2^n[0, \pi]$ ($n \geqslant 0$ — целое) функций из пространства С. Л. Соболева $W_2^n[0, \pi]$, таких, что $q^{(\nu)}(0) = q^{(\nu)}(\pi)$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$), Рассмотрим краевые задачи, порождаемые этим оператором и краевыми условиями

$$y(0)=\omega y(\pi),\ \bar{\omega} y'(0)=y'(\pi); \tag{2}$$
$$y(0)=-\omega y(\pi),\ \bar{\omega} y'(0)=-y'(\pi), \tag{2'}$$

где ω — произвольное комплексное число, по модулю равное единице ($|\omega|=1$).

В случае, когда $\omega=1$, условия (2) ((2')) соответствуют периодической (антипериодической) краевой задаче, а при $\omega\neq\pm 1$ их называют (см. [2, гл. IX]) квазипериодическими. Для периодической и антипериодической краевых задач в [1] получен критерий того, что две последовательности чисел являются их спектрами.

В настоящей статье дана характеристика спектров квазипериодических краевых задач (1) — (2) и (1) — (2') ($|\omega|=1$, $R e\omega<0$, $\omega\neq-1$). Пусть $-\infty<\mu_0\leqslant\mu_1^-\leqslant\mu_1^+<\mu_2^-\leqslant\mu_2^+<\ldots$ собственные значения периодической и антипериодической задач для оператора (1), а $a_{2m}^{\pm}$ и $a_{2m+1}^{\pm}$ ($m=0, 1, 2, \ldots$) — собственные значения краевых задач (1) — (2) и (1) — (2'), порождаемых тем же оператором L. Можно показать, что эти числа всегда удовлетворяют системе неравенств

$$-\infty<\mu_0\leqslant a_0<a_1^-\leqslant\mu_1^-\leqslant\lambda_1\leqslant\mu_1^+\leqslant a_1^+<a_2^-\leqslant\mu_2^-\leqslant\lambda_2\leqslant$$
$$\leqslant\mu_2^+\leqslant a_2^+<\ldots, \tag{3}$$

где λ_k — собственные значения краевой задачи для оператора (1) с граничными условиями $y(0)=y(\pi)=0$.

Используя некоторые результаты работы [1], установим необходимые достаточные условия для того, чтобы последовательность вещественных чисел

$$-\infty<a_0<a_1^-\leqslant a_1^+<a_2^-\leqslant a_2^+<a_3^-\leqslant a_3^+<\ldots \tag{3'}$$

состояла из собственных значений краевых задач (1)—(2) и (1)—(2').

Теорема. *Для того чтобы последовательность (3') состояла из собственных значений задач* (1)—(2), (1)—(2') ($\omega\neq-1$) *с потенциалом* $q(x)\in W_2^n[0,\pi]$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_k^{\pm}=a_0-z^2(0+0)+z^2(k\pi\pm 0)\quad (k=1, 2, 3, \ldots), \tag{4}$$

где функция $z=z(\Theta)$ *осуществляет конформное отображение области*

$$\{\Theta: \mathrm{Jm}\Theta>0\}\setminus\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\{\Theta: \mathrm{Re}\Theta=k\pi,\ 0\leqslant\mathrm{Jm}\Theta\leqslant h_k\} \tag{5}$$

на полуплоскость $\mathrm{Jm}\, z>0$, *нормированное условиями*

$$z(ih)=0,\ \lim_{\Theta\to\infty}(i\Theta)^{-1}z(i\Theta)=\frac{1}{\pi}, \tag{6}$$

причем $h_k = h_{-k}$,

$$\operatorname{ch} h = \frac{1}{|\operatorname{Re}\omega|}, \ \operatorname{ch} h_k \geqslant \frac{1}{|\operatorname{Re}\omega|} \ (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{7}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2n+2}(h_k - h) < \infty. \tag{8}$$

Сопоставление этого результата с критерием, полученным в [1, теорема 5.1], показывает, что, по сравнению с периодическим и антипериодическим случаями, для которых $h = 0$, в квазипериодическом случае появляется требование (8), существенно более сильное, чем требование сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (k^{n+1}h_k)^2 < \infty$, которое фигурирует в теореме 5.1 работы [1].

Доказательство теоремы. *Необходимость.* Пусть задан некоторый потенциал $q(x) \in W_2^n[0, \pi]$. Рассмотрим функцию Ляпунова оператора (1), т. е. целую четную функцию

$$\tilde{u}(\lambda) = 1/2\,[c(\lambda, \pi) + s'(\lambda, \pi)], \tag{9}$$

где $c(\lambda, x)$ и $s(\lambda, x)$ — решения уравнения $L[y] = \lambda^2 y(x)$, удовлетворяющие начальным условиям $c(\lambda, 0) = s'(\lambda, 0) = 1, c'(\lambda, 0) = s(\lambda, 0) = 0$. Нули функции $\tilde{u}^2(\lambda,) - 1$ являются квадратными корнями из собственных значений $\mu_k^{\pm}$ периодической и антипериодической задач для оператора (1). Не ограничивая общности, будем считать, что $\mu_0 = 0$. Поскольку теперь все корни уравнения $\tilde{u}^2(\lambda) - 1 = 0$ вещественны, то, как показано в [1] (см. следствие 1,1), имеет место представление $\tilde{u}^2(z) = \cos \tilde{u}(z)$, где $\tilde{\Theta} = \tilde{\Theta}(z)$ — функция, осуществляющая конформное отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Jm} z > 0$ в область вида

$$\{\tilde{\Theta} : \operatorname{Jm}\tilde{\Theta} > 0\} \setminus \bigcup_{k=-\infty} \{\tilde{\Theta} : \operatorname{Re}\tilde{\Theta} = k\pi, 0 \leqslant \operatorname{Jm}\tilde{\Theta} \leqslant \tilde{h}_k\}, \tag{5'}$$

$\tilde{h}_0 = 0, \tilde{h}_k = \tilde{h}_{-k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, нормированное условиями

$$\tilde{\Theta}(0) = 0, \ \lim_{y \to \infty} (iy)^{-1}\tilde{\Theta}(iy) = \pi$$

и аналитически продолженная в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Jm} z < 0$ через отрезки действительной оси $\operatorname{Jm} z = 0$, являющиеся прообразами отрезков $\{\tilde{\Theta} : \operatorname{Jm}\tilde{\Theta} = 0, \ k\pi \leqslant \operatorname{Re}\Theta \leqslant (k+1)\pi\}$, причем (см. [1], теорема 5.1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k^{n+1}h_k)^2 < \infty \tag{10}$$

и

$$\sqrt{\mu_k^-} = \tilde{z}(k\pi - 0), \quad \sqrt{\mu_k^+} = z(k\pi + 0), \tag{11}$$

где $\tilde{z}(\tilde{\Theta})$ — функция, обратная $\tilde{\Theta}(z)$.

Рассмотрим теперь функцию $u(z) = \frac{1}{|\operatorname{Re}\omega|}\tilde{U}(z)$. Экстремумы функций $u(x)$ и $\tilde{u}(x)$ достигаются в одних и тех же точках. Заметим, далее, что собственные значения $a_{2k}^{\pm}$ и $a_{2k+1}^{\pm}$ краевых задач (1)—(2) и (1)—(2′)—это квадраты корней уравнений $\tilde{U}(z) + \operatorname{Re}\omega = 0$ и $\tilde{u}(z) - \operatorname{Re}\omega = 0$. Учитывая неравенство (3) и то, что $\mu_0 = 0$, заключаем, что все корни уравнения $u^2(z) - 1 = 0$ вещественны. Поэтому в силу упомянутого выше результата из работы [1] имеет место представление $u(z) = \cos\Theta(z)$, где $\Theta(z)$ — функция, осуществляющая конформное отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Jm} z > 0$ на область вида (5) и аналитически продолженная в нижнюю полуплоскость через прообразы отрезков $\{\Theta : \operatorname{Jm}\Theta = 0,\ k\pi \leqslant \operatorname{Re}\Theta \leqslant (k+1)\pi\}$. Поскольку $u(0) = \frac{1}{|\operatorname{Re}\omega|} = \operatorname{ch} h$, то $\Theta(0) = ih$. Благодаря четкости функции $u(x) = \cos\Theta(x)$ мы имеем

$$\operatorname{ch} h_k = \max_{\sqrt{a_k^-} < x < \sqrt{a_k^+}} |u(x)| = \max_{-\sqrt{a_k^+} < x < -\sqrt{a_k^-}} |u(x)| = \operatorname{ch} h_{-k}.$$

Из зависимости между $u(z)$ и $\tilde{u}(z)$ видно, что имеет место формула (4), а из (6′) следует (6). Необходимость неравенства (7) можно получить из (3). Остановимся на условии (8). Прежде всего замечаем, что из зависимости между функциями $u(x)$ и $\tilde{u}(x)$ следует неравенство $h_k \geqslant h\,(k = 1, 2, 3, \ldots)$ и соотношение

$$|\operatorname{Re}\omega| \operatorname{ch} h_k = \operatorname{ch}\tilde{h}_k. \tag{12}$$

Полагая $h_k = h + \frac{\varepsilon_k}{k}$, имеем $\operatorname{ch}\tilde{h}_k = \frac{1}{\operatorname{ch} h}\operatorname{ch} h_k = \frac{1}{\operatorname{ch} h}\operatorname{ch} h \cdot$

$$\cdot \operatorname{ch}\frac{\varepsilon_k}{k} + \frac{1}{\operatorname{ch} h}\operatorname{sh} h \cdot \operatorname{sh}\frac{\varepsilon_k}{k} = \left(1 + \frac{\varepsilon_k^2}{k} + \ldots\right) + \frac{\operatorname{sh} h}{\operatorname{ch} h}\left(\frac{\varepsilon_k}{k} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_k}{k}.$$

Таким образом,

$$1 + \frac{1}{2}\tilde{h}_k^2 + \ldots = 1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_k}{k},$$

т. е. $\tilde{\varepsilon}_k = \frac{1}{2} k \tilde{h}_k^2 [1 + 0(1)]$, когда $k \to \infty$ Отсюда заключаем, что

$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2n+1} \varepsilon_k = 1/2 \sum_{k=1}^{\infty} (k^{n+1} h_k)^2 [1 + 0(1)] < \infty$, а значит, и

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2n+1} (h_k - h) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n+1} \varepsilon_k < \infty.$$

Достаточность. Рассмотрим целую функцию $u(z) = \cos \Theta(z)$, где $\Theta(z)$ — отображение, данное в условии теоремы. Так как $\Theta(0) = ih$, то $\cos \Theta(0) = \operatorname{ch} h > 1$. Пусть $\tilde{u}(z) = \frac{1}{\operatorname{ch} h} u(z)$. Экстремумы функции $\tilde{u}(x)$ на вещественной оси $-\infty < x < \infty$ достигаются в тех же точках, что и экстремумы функции $u(x)$. Этими точками являются прообразы при отображении $\Theta(z) = \Theta$ вершин разрезов в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \Theta > 0$. Следовательно, в силу неравенства (7) абсолютное значение всех экстремумов не меньше единицы, а $\tilde{u}(0) = 1$. Убедимся теперь в том, что все корни уравнения $\tilde{u}^2(z) - 1 = 0$ вещественны. В самом деле, пусть $\Theta_1(z) = \operatorname{Re}\Theta(z)$, $\Theta_2(z) = \operatorname{Im}\Theta(z)$. Тогда $\tilde{u}(z) =$
$= 1/\operatorname{ch} h \{\cos \Theta_1(z) \operatorname{ch} \Theta_2(z) + i \sin \Theta_1(z) \operatorname{sh} \Theta_2(z)\}$

и, если $\tilde{u}(z) \pm 1 = 0$ либо $\Theta_2(z) = 0$, либо $\Theta_1(z) = k\pi$, где k — целое. В первом случае $\Theta(z)$ вещественно, а вместе с ним вещественным является и значение z. Во втором случае $1/\operatorname{ch} h \operatorname{ch} \Theta_2(z) = 1$, т. е. образ точки z при отображении $\Theta = \Theta(z)$ имеет в плоскости Θ координаты $(k\pi, \operatorname{ch} h)$. Благодаря неравенству (7) это означает, что он находится на границе области (5) и, следовательно, z находится на вещественной оси. Применив снова упоминавшийся уже результат из работы [1], мы получим для $\tilde{u}(z)$ представление $\tilde{u}(z) = \cos \tilde{\Theta}(z)$, где $\tilde{\Theta}(z)$ — функция, конформно отображающая верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ в область вида (5′). При этом числа μ_k^+ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и μ_k^- $(k = 1, 2, \ldots)$, определяемые формулами (11), будут квадратами нулей функции $\tilde{u}^2(z) - 1$. В силу зависимости между $u(z)$ и $\tilde{u}(z)$ имеет место (6). Кроме того, так как

$$\operatorname{ch}\tilde{h}_k = 1/\operatorname{ch} h \operatorname{ch} h_k = 1/\operatorname{ch} h \operatorname{ch}\left(h + \frac{\varepsilon_k}{k}\right) = 1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_k}{k},$$

$$\text{где } \tilde{\varepsilon}_k \asymp \varepsilon_k = k(h_k - h), \text{ то } 1 + 1/2\, \tilde{h}_k^2 + \ldots = 1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_k}{k},$$

т. е. $\tilde{\varepsilon}_k = 1/2k\tilde{h}_k^2[1 + 0(1)]$, когда $k \to \infty$. Отсюда видно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k^{n+1}\tilde{h}_k)^2[1 + 0(1)] = \sum_{k=1}^{\infty}k^{2n+1}\tilde{\varepsilon}_k < \infty.$$

В [1] показано (см. теорему 5.1), что это обеспечивает существование принадлежащего к $\tilde{W}_2^n[0, \pi]$ потенциала $q(x)$, для которого соответствующие последовательности (11) являются последовательностями собственных чисел порождаемой им периодической и антипериодической задач Штурма-Лиувилля, а $\tilde{u}(\lambda)$ — их функцией Ляпунова. Из зависимости между $u(\lambda)$ и $\tilde{u}(\lambda)$ тогда следует, что для потенциала $q(x)$ характеристической функцией рассматриваемых квазипериодических задач будет

$$c(\lambda, \pi) + s'(\lambda, \pi) \mp \operatorname{Re} \omega.$$

Ее нулями являются числа $z(k\pi \pm 0)$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$, где $z(\Theta)$ — функция, обратная к $\Theta(z)$. Следовательно, в силу (4) числа $a_k^{\pm} - a_0 + z^2(0 + 0)$ являются собственными значениями этих задач. Отсюда вытекает, что при произвольном вещественном a_0 в $\tilde{W}_2^n$ существует потенциал, для которого числа $a_k^{\pm}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, определяемые формулами (4), служат собственными значениями соответствующих квазипериодических задач.

Список литературы: 1. *Марченко В. А., Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла. — «Мат. сб.», 1975, т. 97 (139), № 4, с. 540-606. 2. *Крейн С. Г.* Функциональный анализ. М., «Наука», 1972. 544 с.

Поступила 23 марта 1977 г.