УДК 517.522.2

НГУЕН ТХЫОНГ УЕН

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА И НОРМАЛЬНОГО ТИПА

Настоящая работа является продолжением исследования некоторых интерполяционных задач в полуплоскости, решения которых были даны в статьях [1—3]. В статье [3] мы нашли условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данные последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ точек в верхней полуплоскости и последовательность $Q = \{q_n\}$ натуральных чисел обладали следующим свойством: для каждой последовательности комплексных чисел $\{a_{n,j}\}$ $(n = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots, q_n)$, удовлетворяющей условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\ln|\lambda_n|} \ln^+ \ln^+ \max_{1\leqslant j\leqslant q_n} |a_{nj}| \leqslant \rho,$$

существует функция $f(z)$ аналитическая и порядка $\leqslant\rho$ в верхней полуплоскости, решающая интерполяционную задачу $f^{(j-1)}\times\times(\lambda_n)=a_{n,}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ q_n)$. Рассмотрим более тонкую интерполяционную задачу с помощью функций класса $[\rho,\ \infty)^+$, т. е. класса функций аналитических, порядка, меньшего ρ или равного ρ и типа не высшего, чем нормальный в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$. Для формулировки нашей интерполяционной задачи введем понятие об интерполяционной паре в классе $[\rho,\ \infty)^+$.

Будем говорить, что последовательность $\Lambda=\{\lambda_n\}$ точек в верхней полуплоскости и последовательность $Q=\{q_n\}$ натуральных чисел образуют интерполяционную пару в классе $[\rho,\ \infty)^+$, если для любой последовательности комплексных чисел $\{a_{n,j}\}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ q_n)$, удовлетворяющей условию

$$\ln^+\max_{1\leqslant j\leqslant q_n}|a_{n,j}|=0(|\lambda_n|^\rho)\ (n\to\infty)\tag{1}$$

найдется функция $f(z)\in[\rho,\ \infty)^+$, такая, что $f^{(j-1)}(\lambda_n)=a_{n,j}\,(n=1,\ 2,\ \ldots;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ q_n)$.

Наша задача состоит в том, чтобы найти условия интерполяционности для пары заданных последовательностей Λ и Q. Для изложения нашего результата нам понадобятся еще следующие определения.

Мы будем говорить, что пара последовательностей Λ и Q имеет конечную верхнюю плотность при порядке ρ, если последовательность Λ_Q, состоящая из точек $\lambda_n\in\Lambda$ с учетом кратности соответственно $q_n\in Q$, имеет конечную верхнюю плотность, т. е. $C(r)=\sum\limits_{r_n\leqslant r}q_n\sin\theta_n=0(r^\rho)\ (r\to\infty)$, где $\lambda_n=r_ne^{i\theta_n}$.

Функция $L(z)\in[\rho,\ \infty)^+$ называется присоединенной функцией пары последовательностей Λ и Q, если функция $L(z)$ имеет в точках $\lambda_n\in\Lambda$ корни с кратностями соответственно $q_n\in Q$, и, кроме того, множество Ξ остальных корней этой функции удовлетворяет условиям: а) $d(\Xi,\ \lambda_n)>\delta r_n^{1-\rho}$, $\delta>0$; б) $\tau_{n+1}-\tau_n>\alpha\tau_n^{1-\rho}$, $\alpha>0$; в) $C(r,\ \Xi)=0(r^\rho)$, $(r\to\infty)$; г) при целом ρ

$$\left|\sum_{r_n\leqslant r}\frac{q_n\sin\rho\theta_n}{r_n^\rho}+\sum_{\tau_n\leqslant r}\frac{\sin\rho\vartheta_n}{\tau_n^\rho}\right|=0(1)\ (r\to\infty),$$

где $\mu_n=\tau_ne^{i\vartheta_n}$, а $d(\Xi,\ \lambda)$ — расстояние между множеством Ξ и точкой λ, $C(r,\ \Xi)=\sum\limits_{\tau_n\leqslant r}\sin\vartheta_n$.

В дальнейшем будем пользоваться некоторыми фактами из теории аналитических функций конечного порядка в полуплоскости, приведенными в статье [2].

При доказательстве теоремы 3 [2] мы нигде не использовали простоту узлов $\{\lambda_n\}$, поэтому и в случае кратных узлов верна теорема

Теорема 1. *Для всякой пары последовательностей* Λ *и* Q, *имеющей конечную верхнюю плотность при порядке* $\rho > 1$, *существует присоединенная функция.*

Заметим, что утверждение теоремы содержательно только в том случае, когда пара Λ и Q, имеющая конечную верхнюю плотность при целом порядке ρ, не удовлетворяет условию симметрии.

$$\left| \sum_{r_n < r} q_n \frac{\sin \rho\theta_n}{r_n^\rho} \right| = 0(1) \quad (r \to \infty). \tag{2}$$

В этом случае присоединенную функцию можно построить в виде

$$\hat{E}(z) = \prod_{r_n < 1} \left(\frac{z - \lambda_n}{z - \bar{\lambda}_n} \right)^{q_n} \prod_{r_n > 1} E_\rho^{q_n}(z, \lambda_n) \prod_{n=1}^{\infty} E_\rho(z, \mu_n). \tag{3}$$

Причем точки последовательности $\Xi = \{\mu_n\}$ лежат только на двух лучах $\theta = \frac{\pi}{2\rho}$; $\theta = \frac{3\pi}{2\rho}$.

В противном случае в силу теоремы 1 в работе [2] за присоединенную функцию можно принять следующую:

$$E(z) = \prod_{r_n < 1} \left(\frac{z - \lambda_n}{z - \bar{\lambda}_n} \right)^{q_n} \prod_{r_n > 1} E_p^{q_n}(z, \lambda_n). \tag{4}$$

Пусть пара последовательностей Λ и Q имеет конечную верхнюю плотность при порядке ρ, $L(z)$ — ее присоединенная функция. Тогда определим некоторые величины, зависящие от этих последовательностей и функции $L(z)$:

$$\gamma_{n,j}(L) = \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{j-1} \left| \frac{(z - \lambda_n)^{q_n}}{L(z)} \right|_{z = \lambda_n};$$

$$T_n^{(0)}(L) = \max_{1 \leq j \leq q_n} (\operatorname{Im} \lambda_n)^{j-1} |\gamma_{n,j}(L)|;$$

$$T_n^{(1)}(L) = \max_{1 \leq j \leq q_n} (q_n - 1)!\, (\operatorname{Im} \lambda_n)^{j-1} |\gamma_{nj}(L)|.$$

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 2. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $\operatorname{Im} \lambda_n > 0$, $\lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ — *последовательность точек в верхней полуплоскости,* $Q = \{q_n\}$ — *последовательность натуральных чисел. Тогда для того чтобы последовательности* Λ *и* Q *образовали интерполяционную пару в классе* $[\rho, \infty)^+$, *где* $\rho > 1$, *необходимо, чтобы выполнялись соотношения:*

А. Пара последовательностей Λ *и* Q *имеет конечную верхнюю плотность при порядке* ρ.

Б. Существует хотя бы одна присоединенная функция $L(z)$ пары последовательностей Λ и Q, такая, что справедливо неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{r_n^{\rho}} \ln \frac{T_n^{(0)}(L)}{3^{q_n}(\operatorname{Im}\lambda_n)^{q_n}} < \infty,$$

и достаточно, чтобы имели место условие А и условие

В. Хотя бы для одной присоединенной функции $L(z)$ пары этих последовательностей выполнялось неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{r_n^{\rho}} \ln \frac{T_n^{(1)}(L)}{(\operatorname{Im}\lambda_n)^{q_n+1}} < \infty.$$

Доказательство. *Необходимость.* Сначала докажем необходимость условия A. Пусть существует функция $f(z) \in [\rho, \infty)^+$, такая, что $f^{(j-1)}(\lambda_1) = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, q_1)$; $f^{(j-1)}(\lambda_n) = 0$ для всех $n \geqslant 2$ и $j = 1, 2, \ldots, q_n$. Тогда необходимость условия A немедленно следует из леммы 1 статьи [2]. Доказательство необходимости условия $Б$ несколько сложнее. Рассмотрим случай, когда пара Λ и Q имеет конечную верхнюю плотность при целом порядке ρ, но не удовлетворяет условию симметрии (2). В противном случае необходимость условия $Б$ доказывается аналогично.

Докажем необходимость условия $Б$ при выше указанном предположении от противного. Допустим, что для всех присоединенных функций $L(z)$ пары последовательностей Λ и Q справедливо равенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{r_n^{\rho}} \ln \frac{T_n^{(0)}(L)}{3^{q_n}(\operatorname{Im}\lambda_n)^{q_n}} = \infty.$$

В частности, найдутся подпоследовательность $\{\nu_n\} = \{\lambda_{k_n}\} \subset \Lambda$ и последовательность натуральных чисел $\{j_n\} = \{j_{k_n}\}$, $1 \leqslant j_{k_n} \leqslant q_{k_n}$, такие, что $t_1 > 1$, $t_{n+1} > n^n t_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$; $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha_0$, где $\nu_n = t_n e^{i\alpha_n}$ и, кроме того, α_n удовлетворяют только одному из неравенств $\sin\rho\alpha_n \geqslant 0$ или $\sin\rho\alpha_n \leqslant 0$, пусть для определенности $\sin\rho\alpha_n \geqslant 0$ и имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n^{\rho}} \ln \frac{|\hat{\gamma}_{n,j_n}(\hat{E})|}{3^{s_n}(\operatorname{Im}\nu_n)^{s_p+1-j_n}} = \infty. \tag{5}$$

Здесь $s_n = q_{k_n}$; $\hat{\gamma}_{n,j_n}(\hat{E}) = \gamma_{k_n, j_n}(\hat{E})$; $j_n = j_{k_n}$, такие, что

$$T_{k_n}^{(0)}(\hat{E}) = (\operatorname{Im}\nu_n)^{j_n-1} |\hat{\gamma}_{n,j_n}(\hat{E})|.$$

Пусть функция $f(z) \in [\rho, \infty)^+$ такова, что

$$f^{(j-1)}(\nu_n) = \begin{cases} 1 \text{ при } j = 1, \\ 0 \text{ при } 2 \leqslant j \leqslant s_n \end{cases} \tag{6}$$

и $f^{(j-1)}(\lambda_n) = 0$ при всех $\lambda_n \notin \{\nu_n\}$, $1 \leqslant j \leqslant q_n$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Omega(z) = \frac{f(z) H(z) G(z)}{\hat{E}(z)},$$

где

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{\mu_n}, \rho\right) G\left(\frac{z}{\mu_n'}, \rho\right),$$

(Gu, ρ) — первичный сомножитель Вейерштрасса. Последовательность $\{\mu_n'\}$ точек в нижней полуплоскости определяется таким образом: если $\rho = 2\nu + 1$, то положим $\mu_n' = -\mu_n$, если же $\rho = 2\nu$, то положим $\mu_n' = \exp i\left(1 + \frac{1}{\rho}\right)\pi \cdot \mu_n$, а функция $H(z)$ является присоединенной функцией пары $\{\nu_n\}$ и $\{s_n\}$, построенной с помощью процесса построения дополнительного сомножителя, который проводился в доказательстве теоремы 3 в [2]. Пусть

$$H(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_\rho^{s_n}(z, \nu_n) \prod_{n=1}^{\infty} E_\rho(z, \zeta_n).$$

Заметим, что все точки ζ_n находятся на одном луче $\theta = \frac{3\pi}{2}$, так как $\sin \rho\alpha_n \geqslant 0$. Функция $\Omega(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости. Применяя метод, проведенный в доказательстве леммы 3 в [2], получим, что $\Omega(z)$ представляет собой функцию класса $[\rho, \infty)^+$. Из представления функции $\Omega(z)$ в виде (7) и свойства (6) функции $f(z)$ следует, что

$$\hat{\gamma}_{n, j_n}(\hat{E}) = \frac{1}{(j_n - 1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{j_n - 1} \frac{(z - \nu_n)^{s_n}}{\hat{E}(z)} \Bigg|_{z=\nu_n} = \frac{1}{(j_n - 1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{j_n - 1} \times$$

$$\times \frac{(z - \nu_n)^{s_n} f(z)}{\hat{E}(z)} \Bigg|_{z=\nu_n} = \frac{1}{(j_n - 1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{j_n - 1} \frac{(z - \nu_n)^{s_n} \Omega(z)}{H(z) G(z)} \Bigg|_{z=\nu_n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{(\zeta - \nu_n)^{s_n} \Omega(\zeta)\, d\zeta}{H(\zeta) G(\zeta) (\zeta - \nu_n)^{j_n}},$$

или

$$\hat{\gamma}_{n, j_n}(\hat{E}) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\nu_n}{\overline{\nu}_n}\right)^{s_n} \int_{c_n} \frac{(\zeta - \overline{\nu}_n)^{s_n} \Omega(\zeta)\, d\zeta}{H_n(\zeta) G(\zeta) (\zeta - \nu_n)^{j_n}}, \tag{7}$$

где c_n — некоторая окружность с центром в точке ν_n.

$$H_n(\zeta) = e^{s_n \sum\limits_{i=1}^{\rho} \frac{\zeta^i}{i}\left(\frac{1}{\nu_n^i} - \frac{1}{\bar{\nu}_n^i}\right)} \prod_{k \neq n} E_\rho^{s_k}(\zeta, \nu_k) \prod_{k=1}^{\infty} E_\rho(\zeta, \zeta_k). \qquad (8)$$

Для того чтобы получить нужную нам оценку сверху модуля $\hat{\gamma}_{n, j_n}(\hat{E})$, будем рассматривать поведение последовательности в двух случаях: (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha_0 \neq 0;\ \pi$; ($ii$) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \pi$;

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha_0 \neq 0;\ \pi$. Так как $G(\zeta)$ является каноническим произведением Вейерштрасса, то для любого $\eta \leqslant \frac{3}{2} e$ внутри круга $|\zeta| \leqslant R$, но вне исключительных кругов с общей суммой радиусов, меньшей, чем $4\eta R$, функция $G(\zeta)$ допускает оценку снизу (см. [4, с. 33—34]): $\ln|G(\zeta)| > -H(\eta) \ln M(2eR, G)$, где $H(\eta) = 2 + \ln 3e/2\eta$. Выберем $\eta = 1/32 \sin\frac{\pi}{2\rho} \sin\alpha_0$. Тогда при достаточно большом n существует β_n, такое, что $1/16 \sin\frac{\pi}{2\rho} < \beta_n < 1/4 \sin\frac{\pi}{2\rho}$ и на окружности $c_n = \{\zeta,\ |\zeta - \nu_n| = \beta_n \operatorname{Im} \nu_n\}$ функция $G(z)$ удовлетворяет неравенству $\ln \min\limits_{\zeta\in c_n} |G(\zeta)| > -H(\eta) \times \ln M(4et_n, G)$, или

$$\min_{\zeta\in c_n} |G(\zeta)| > \exp(-K_\eta t_n^\rho). \qquad (9)$$

Рассматриваем функцию $H_n(\zeta)$. Учитывая тот факт, что $t_{n+1} > n^n t_n$ и точки ζ_n лежат на одном луче $\theta = \frac{3\pi}{2\rho}$, в силу теоремы 2 в [2] получаем, что при достаточно большом M функция $H_n(\zeta)$ допускает оценку

$$\min_{\zeta\in c_n} |H_n(\zeta)| > \exp(-Mt_n^\rho). \qquad (10)$$

Из последнего неравенства, оценка (9) и принадлежности функции $\Omega(z)$ к классу $[\rho, \infty)^+$ следует, что при выше указанном выборе c_n справедливо соотношение

$$|\hat{\gamma}_{n, j_n}(\hat{E})| < B^{s_n + j_n} (\operatorname{Im} \nu_n)^{s_n + 1 - j_n} \exp C t_n^\rho. \qquad (11)$$

Поскольку пара Λ и Q имеет конечную верхнюю плотность при порядке ρ, $\sin\alpha_n > \frac{1}{2}\sin\alpha_0$, следовательно, $s_n = 0(t_n^\rho)$, то соотношение (11) можно переписать так:

$$|\hat{\gamma}_{n, j_n}(\hat{E})| < (\operatorname{Im} \nu_n)^{s_n + 1 - j_n} \exp C_1 t_n^\rho \qquad (12)$$

(*ii*) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\pi$. В этом случае выберем $c_n=\{\zeta:|\zeta-$ $-\nu_n|=\operatorname{Im}\nu_n\}$. Учитывая, что корни функции $G(\zeta)$ лежат только на 4 лучах $\theta=\frac{\pi}{2\rho}$; $\theta=\frac{3\pi}{2\rho}$, $\theta=\left(1+\frac{1}{2\rho}\right)\pi$, $\theta=\left(1+\frac{3}{2\rho}\right)\pi$ или $\theta=$ $=\frac{\pi}{2\rho}$, $\theta=\frac{3\pi}{2\rho}$, $\theta=\left(1+\frac{3}{2\rho}\right)\pi$, $\theta=\left(1+\frac{5}{2\rho}\right)\pi$ в зависимости от того, что $\rho=2\nu+1$ или $\rho=2\nu$, можно показать, что существует постоянная величина K_1, такая, что

$$\min_{\zeta\in c_n}|G(\zeta)|>\exp\left(-K_1t_n^{\rho}\right). \tag{13}$$

Неравенство (10) остается справедливым и в случае $c_n=$ $=\{\zeta:|\zeta-\nu_n|=\operatorname{Im}\nu_n\}$, следовательно, в силу (8) имеем

$$|\hat{\gamma}_{n,j_n}(\hat{E})|<3^{s_n}(\operatorname{Im}\nu_n)^{s_n+1-j_n}\exp C_2t_n^{\rho}. \tag{14}$$

Оценки (12) и (14) противоречат соотношению (5). Тем самым мы доказали необходимость условия *Б*.

Достаточность. Пусть последовательность комплексных чисел $\{a_{nj}\}$ $(n=1,\,2,\,\ldots;\ j=1,\,2,\,\ldots,\,q_n)$ удовлетворяет условию (1). Покажем, что можно построить функцию $f(z)\in[\rho,\,\infty)+$ дающую решение нашей интерполяционной задачи в виде

$$f(z)=L(z)\sum_{n=1}^{\infty}P_n(z), \tag{15}$$

где $L(z)$ — присоединенная функция пары последовательностей Λ и Q, удовлетворяющая условию *В*,

$$P_n(z)=\sum_{m=1}^{q_n}\alpha_{nm}\left[\frac{1}{z-\lambda_n}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^{s_n}\right]^{(m-1)}, \tag{16}$$

$$\alpha_{nm}=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\sum_{i=0}^{q_n-m}\frac{1}{i!}\gamma_{n,\,q_n+1-m-i}a_{n,\,i+1}. \tag{17}$$

Легко видеть, что формально ряд (15) дает решение интерполяционной задачи, т. е. имеют место равенства (см. 3) $f^{(j-1)}(\lambda_n)=$ $=a_{n,j}\ (n=1,\,2,\,\ldots;\ j=1,\,2,\,\ldots,\,q_n)$.

Мы покажем, что при разумном подборе натуральных чисел $\{s_n\}$ ряд (15) сходится равномерно на каждом компакте в верхней полуплоскости и функция $f(z)$, определенная им, является функцией класса $[\rho,\,\infty)+$.

Сначала получим оценку сверху для модуля α_{nm}. Из условий (1) и *В* следует, что имеется абсолютная постоянная величина C_1 такая, что

$$|\alpha_{nm}|\leqslant\frac{e^{C_1r_n^{\rho}}}{(m-1)!}\sum_{i=0}^{q_n-m}\frac{(\operatorname{Im}\lambda_n)^{m+i+1}}{i!\,(m+i-1)!}\leqslant\frac{e^{C_1r_n^{\rho}}}{[(m-1)!]^2}(\operatorname{Im}\lambda_n)^{m+1}e^{\operatorname{Im}\lambda_n}.$$

Поскольку $\rho > 1$, то существует константа C_2, для которой верна оценка

$$|\alpha_{nm}| < \frac{(\operatorname{Im}\lambda_n)^{m+1}}{[(m-1)!]^2} \exp C_2 r_n^\rho. \tag{18}$$

По определению положим

$$s_n = \max\{[C(r_n)] + 1, \ [C_3 r_n^\rho] + 1\}, \tag{19}$$

где $C_3 = C_2 + 1$. В силу того что пара последовательностей Λ и Q имеет конечную верхнюю плотность при порядке ρ, числа s_n допускают оценку сверху

$$s_n \leqslant C r_n^\rho. \tag{20}$$

Покажем, что при таком подборе чисел $\{s_n\}$ ряд (15) представляет собой функцию класса $[\rho, \infty)+$.

Представим $f(z)$ в виде $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, где

$$f_1(z) = \sum_{r_n \leqslant e^3 r} L(z) P_n(z); \ f_2(z) = \sum_{r_n > e^3 r} L(z) P_n(z), \ r = |z|.$$

Оцениваем модуль функции $f_2(z)$. Для этого рассматриваем

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{z - \lambda_n}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^{s_n}.$$

При $r < e^{-3} r_n$ $(m-1)$ — производная этой функции в точке z может быть выражена в форме

$$\varphi_n^{(m-1)}(z) = \frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\varphi_n(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^m} = \frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_{C_2}\left(\frac{\zeta}{\lambda_n}\right)^{s_n} \frac{d\zeta}{(\zeta-\lambda_n)(\zeta - z)^m},$$

где $C_2 = \{\zeta : |\zeta - z| = 1\}$. Следовательно, имеем при $r > 2$

$$|\varphi_n^{(m-1)}(z)| \leqslant \frac{(m-1)!}{(e^3-2)\, r} e^{-3s_n}\left(1 + \frac{1}{r}\right)^{s_n} < (m-1)!\, e^{-2s_n}.$$

Из последнего неравенства и оценки (18) вытекает, что

$$|f_2(z)| \leqslant |L(z)| \sum_{r_n > e^3 r} \sum_{m=1}^{q_n} |\alpha_{nm}| |\varphi_n^{(m-1)}(z)| \leqslant$$

$$\leqslant |L(z)| \sum_{r_n > e^3 r} \sum_{m=1}^{q_n} \frac{(\operatorname{Im}\lambda_n)^{m+1}}{(m-1)!} \exp(C_2 r_n^\rho - 2s_n) \leqslant$$

$$\leqslant |L(z)| \sum_{r_n > e^3 r} (\operatorname{Im}\lambda_n)^2 \exp(\operatorname{Im}\lambda_n + C_2 r_n^\rho - 2s_n) \leqslant$$

$$\leqslant |L(z)| \sum_{r_n > e^3 r} (\operatorname{Im}\lambda_n)^2 e^{-s_n}. \tag{21}$$

Так как пара последовательностей Λ и Q имеет конечную верхнюю плотность при порядке ρ, то справедливо для любого $\varepsilon > 0$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{q_n \sin\theta_n}{r_n^{\rho+\varepsilon}} < \infty$, следовательно, ряд в правой части неравенства (21) сходится. Это значит, что модуль функции $f_2(z)$ допускает такую оценку сверху

$$|f_2(z)| < M\,|L(z)|, \tag{22}$$

где M — константа, не зависящая от z.

Теперь получим оценку сверху для модуля функции $f_1(z)$. Пусть $f_1(z) = g_1(z) + g_2(z)$, где

$$g_1(z) = L(z) \sum_{r_n \leqslant 1} P_n(z); \; g_2(z) = L(z) \sum_{1 < r_n \leqslant e^3 r} P_n(z).$$

Очевидно, что $q_1(z) \in [\rho, \infty)^+$. Далее, имеем

$$g_2(z) = \sum_{1 < r_n \leqslant e^3 r} L(z) \sum_{m=1}^{q_n} \alpha_{nm} \left\{ \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(z-\lambda_n)^m} + \psi_n^{(m-1)}(z) \right\},$$

где

$$\psi_n(z) = \sum_{j=0}^{s_n-1} \frac{z^j}{\lambda_n^{j+1}}.$$

Перепишем $g_2(z)$ в виде $g_2(z) = G_1(z) + G_2(z)$, где

$$G_1(z) = \sum_{1 < r_n \leqslant e^3 r} L(z) \sum_{m=1}^{q_n} \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!\,\alpha_{nm}}{(z-\lambda_n)^m},$$

$$G_2(z) = \sum_{1 < r_n \leqslant e^3 r} L(z) \sum_{m=1}^{\hat{q}_n} \alpha_{nm} \psi_n^{(m-1)}(z), \quad \hat{q}_n = \min\{q_n, s_n - 1\}.$$

В силу (18) модуль функции $G_2(z)$ допускает оценку сверху

$$|G_2(z)| \leqslant |L(z)| \sum_{1 < r_n \leqslant e^3 r} e^{c_2 r_n^\rho} \sum_{m=1}^{\hat{q}_n} \frac{(\operatorname{Im}\lambda_n)^{m+1}}{[(m-1)!]^2} \sum_{j=m-1}^{s_n-1} \times$$

$$\times \frac{j(j-1)\ldots(j+2-m)\, r^{j+1-m}}{r_n^{j+1}} \leqslant |L(z)|\, e^{e^{3\rho} c_2 r^\rho} \sum_{1 < r_n \leqslant e^3 r} \sum_{m=1}^{\hat{q}_n} \frac{(\operatorname{Im}\lambda_n)^{m+1}}{(m-1)!\, r_n^m} \times$$

$$\times \sum_{j=m-1}^{s_n-1} \frac{j!}{(m-1)!\,(j+1-m)!} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{j+1-m}.$$

Поскольку для всех $j \geqslant m-1$ справедливо неравенство

$$\frac{j!}{(m-1)(j+1-m)!}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{j+1-m} \leqslant \sum_{\tau=0}^{j} C_j^\tau \left(\frac{r}{r_n}\right)^{j-\tau} = \left(1+\frac{r}{r_n}\right)^j,$$

то мы имеем

$$\sum_{j=m-1}^{s_n-1} \frac{j!}{(m-1)!\,(j+1-m)!}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{j+1-m} \leqslant \sum_{j=m-1}^{s_n-1}\left(1+\frac{r}{r_n}\right)^j = \frac{r_n}{r}\left\{\left(1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{r}{r_n}\right)^{s_n} - \left(1+\frac{r}{r_n}\right)^m\right\} \leqslant e^3\left(1+\frac{r}{r_n}\right)^{s_n} \leqslant e^3\left\{\frac{(1+e^3)\,r}{r_n}\right\}^{s_n},$$

откуда получаем

$$|G_2(z)| \leqslant e^{3+e^{3\rho}c_2r^\rho}\,|L(z)| \sum_{1<r_n<e^3r}\left\{\frac{(1+e^3)\,r}{r_n}\right\}^{s_n} \sum_{m=1}^{\hat{q}_n} \frac{(\operatorname{Im}\lambda_n)^{m+1}}{(m-1)!} \leqslant$$

$$\leqslant e^{3+e^{3\rho}c_2r^\rho}\,|L(z)| \sum_{1<r_n\leqslant e^3r}\left\{\frac{(1+e^3)\,r}{r_n}\right\}^{s_n} (\operatorname{Im}\lambda_n)^2 e^{\operatorname{Im}\lambda_n} \leqslant$$

$$\leqslant |L(z)|\,e^{Kr^\rho} \sum_{1<r_n<e^3r} \sin\theta_n \left\{\frac{(1+e^3)\,r}{r_n}\right\}^{sr_n^\rho}. \tag{23}$$

Введем в рассмотрение функцию $\Phi(x) = \left\{\dfrac{(1+e^3)\,r}{x}\right\}^{cx^\rho}$. Эта функция достигает своего максимума в точке $x_0 = (1+e^3)\,e^{-\frac{1}{\rho}}r$ и $\Phi(x_0) = \exp\left\{\dfrac{ce^{-1}(1+e^3)^\rho}{\rho}r^\rho\right\}$. Подставляя $\Phi(x_0)$ в правую часть (23), выводим неравенство

$$|G_2(z)| < |L(z)|\,e^{K_1r^\rho} \sum_{1<r_n\leqslant e^3r} \sin\theta_n \leqslant |L(z)|\,C(e^3r)\,e^{K_1r^\rho}.$$

В силу конечности верхней плотности при порядке ρ пары последовательностей Λ и Q модуль функции $G_2(z)$ допускает оценку

$$|G_2(z)| \leqslant |L(z)|\,e^{K_2r^\rho}. \tag{24}$$

Теперь займемся оценкой сверху для модуля функции $G_1(z)$. Сначала заметим, что при $1 \leqslant m \leqslant q_n$ функция $(z-\lambda_n)^{-m}L(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости и

$$\max_{|z-\lambda_n|=\operatorname{Im}\lambda_n} |(z-\lambda_n)^{-m}L(z)| = (\operatorname{Im}\lambda_n)^{-m} \max_{|z-\lambda_n|=\operatorname{Im}\lambda_n} |L(z)|.$$

По принципу максимума модуля аналитической функции имеем

$$\max_{|z-\lambda_n|<\operatorname{Im}\lambda_n} |(z-\lambda_n)^{-m}L(z)| = (\operatorname{Im}\lambda_n)^{-m} \max_{|z-\lambda_n|=\operatorname{Im}\lambda_n} |L(z)|,$$

откуда следует, что выполняется асимптотическое неравенство

$$|(z-\lambda_n)^{-m}L(z)| < A(\operatorname{Im}\lambda_n)^{-m}e^{Br^\rho}, \tag{25}$$

где A, B — постоянные величины, не зависящие от n и m. Из оценок (18) и (25) вытекает, что при $r > R$, $G_1(z)$ допускает оценку

$$|G_1(z)| \leqslant Ae^{Br^\rho} \sum_{1<r_n\leqslant e^3 r} \sum_{m=1}^{q_n} \frac{\operatorname{Im}\lambda_n}{(m-1)!} e^{c_2 r_n^\rho} \leqslant$$

$$\leqslant Ae^4 r e^{(c_2 e^{3\rho}+B)r^\rho} \sum_{1<r_n\leqslant e^3 r} \sin\theta_n \leqslant A_1 e^{B_1 r} C(e^3 r), \tag{26}$$

где $A_1 = Ae^4$; $B_1 = c_2 e^{3\rho} + B + 1$.

Соотношения (22), (24) и (26) в совокупности с тем, что $g_1(z) \in [\rho, \infty)^+$, показывают, что аналитическая функция $f(z)$, определенная рядом (15), принадлежит классу $[\rho, \infty)^+$. Тем самым наша теорема полностью доказана.

В заключение автор приносит глубокую благодарность Б. Я. Левину за внимание и руководство работой.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я., Нгуен Тхыонг Уен.* Об интерполяционной задаче в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка. — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 22. Харьков, 1975, с. 77—85. 2. *Нгуен Тхыонг Уен.* Интерполяционная задача в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 24. Харьков, 1975, с. 106—127. 3. *Нгуен Тхыонг Уен.* Интерполирование с крытными узлами в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 29. Харьков, 1978, с. 109—117. 4. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., Физматгиз, 1956. 632 с.

Поступила 26 мая 1975 г.