УДК 513.88+517.94

В. О. МИЩЕНКО

ОБОБЩЕННАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ МАТРИЦА ДЛЯ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО АБСТРАКТНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Рассматривается краевая задача

$$-u'' - Au + c(t)\,u = \lambda^2 \text{ и } (0 < t < \infty) \quad u'(0) = Bu(0), \tag{0.1}$$

где $A = A^* \geqslant 1$ — неограниченный оператор; B, $c(t)$ — несамосопряженные ограниченные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H, причем B и $c(t)$ подчинены A в некотором смысле, уточняемом ниже (раздел 2). В работе для (0.1) построена обобщенная спектральная матрица R, которая порождает обобщенное равенство Парсеваля, и доказана однозначность восстановления коэффициентов B и $c(t)$ по R при заданном A. Эти результаты, в частности, приложимы к задачам спектрального анализа для уравнений в частных производных гиперболического типа.

Обобщенное спектральное разложение для несимметрического оператора Штурма — Лиувилля на полуоси и задач вида (0.1) с ограниченными операторными коэффициентами построено в [1]. Для самосопряженных задач (0.1) с неограниченным $A > 0$ спектральное разложение получено в [2].

Обобщенная спектральная матрица R несимметрической задачи (0.1) с неограниченным $A \geqslant 1$ строится как линейное отображение из некоторого пространства целых функций Z в некоторое пространство $L(G)$ линейных операторов в H. Причем в отличие от [1], где $A = 0$, множество $R(Z)$ содержит неограниченные операторы. Другой подход к построению обобщенной спектральной матрицы развит в эллиптическом случае [3] (для трехмерного несамосопряженного оператора Шредингера). При этом в [3] предложено абстрактное определение обобщенной спектральной матрицы линейного оператора. Можно показать, по крайней мере, когда оператор A имеет чисто дискретный спектр, что построенная нами обобщенная спектральная матрица краевой задачи (0.1) определяет также обобщенную спектральную матрицу в смысле [3] для максимального оператора, отвечающего (0.1).

1. Определения и обозначения

1. $N = \{1, 2, \ldots\}$ — множество натуральных чисел; $\boldsymbol{R} = (-\infty, \infty)$, $\boldsymbol{R}^+ = (0, \infty)$; $\boldsymbol{C}$ — поле комплексных чисел.

2. H, H' — сепарабельное гильбертово пространство и сопряженное к нему пространство линейных непрерывных форм на H

$$\langle f, h \rangle = f(h) \quad (f \in H',\ h \in H); \tag{1.1}$$

θ — инволютивный изоморфизм H' на H ($\theta(f+\lambda g)=\theta f+\bar{\lambda}\theta g$ для $f, g\in H'$, $\lambda\in \boldsymbol{C}$), существование которого устанавливает теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала в $H\cdot H'$ снабжается скалярным произведением, индуцированным из H отображением θ^{-1}.

3. Для замкнутого оператора T в H с плотной областью полагаем

$$fT=\theta^{-1}T^{*}\theta f \quad (\theta f\in D(T)). \tag{1.2}$$

Это позволяет использовать одну и ту же букву для обозначения оператора в H и сопряженного к нему оператора в H', так что для $f\in\theta^{-1}(D(T))$ и $h\in D(T)$:

$$\langle f, Th\rangle=\langle fT, h\rangle. \tag{1.3}$$

4. $\{e_k\}_1^\infty$, $\{e_i'\}_1^\infty$ — ортонормированный базис в H и сопряженный к нему базис в H': $e_i'=\theta^{-1}e_i$.

5. E_μ — разложение единицы оператора $A=A^*\geqslant 1$,

$$A_{\sigma,\gamma}=A^{\gamma}e^{\sigma\sqrt{A}},\ A_{\sigma,\gamma}^{-1}=[A_{\sigma,\gamma}]^{-1}. \tag{1.4}$$

6. $H_{\sigma,\gamma}$ — область $D(A_{\sigma,\gamma})$, рассматриваемая как гильбертово пространство с позитивной нормой [4] ($\sigma,\gamma\geqslant 0$):

$$\|h\|_{\sigma,\gamma}=\|A_{\sigma,\gamma}h\| \quad (h\in H_{\sigma,\gamma}). \tag{1.5}$$

Аналогично определяется $H'_{\sigma,\gamma}=\theta^{-1}(H_{\sigma,\gamma})$.

Для $T\in B(H)$ в обозначениях (1.4) полагаем

$$\langle T\rangle_{\sigma,\gamma}=A_{\sigma,\gamma}TA_{\sigma,\gamma}^{-1}. \tag{1.6}$$

Отметим, что $\|\langle T\rangle_{\sigma,\gamma}\|=\|T\|_{\sigma,\gamma}$.

7. Для функции $f\in L_1(\boldsymbol{R}^+, H)$ полагаем

$$C_f(\lambda)=\int_0^\infty f(x)\cos\lambda x dx. \tag{1.7}$$

Эта формула определяет C_f для $f\in L_2(\boldsymbol{R}^+, H)$ в смысле сходимости интеграла в среднем; C — преобразование оператор-функции $f(x)$ во всех рассматриваемых ниже случаях определяется непосредственно формулой (1.7).

8. $Z_p^\sigma(X)$ — подпространство в $L_p(\boldsymbol{R}, X)$ ($p\geqslant 1$, $\sigma>0$), состоящее из четных целых функций конечного экспоненциального типа не выше σ со значениями в некотором банаховом пространстве X; $Z_p(X)$ линейная оболочка $\bigcup_{\sigma>0} Z_p^\sigma(H_{\sigma,0})$. Аналогично определяется $Z_p^\sigma(H')$ (см. п. 6).

9. Z — пространство скалярных четных целых функций экспоненциального типа, суммируемых на вещественной оси. Будем рассматривать Z как индуктивный предел пространств $S_\sigma\equiv Z_1^\sigma(\boldsymbol{C})$ относительно тождественных вложений S_σ в Z; Z' — пространство обобщенных функций в Z (сопряженное к Z пространство со слабой топологией).

10. Обобщенное косинус-преобразование Фурье функции $\varphi \in L_1^{loc}(\boldsymbol{R}^+)$ — это, как известно, такая обобщенная функция $C_\varphi \in Z'$, что для любой $f \in Z$

$$(f, C_\varphi) = \int\limits_0^\infty C_f(t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{1.8}$$

2. Основные результаты

Всюду ниже предполагается, что операторные коэффициенты B и $c(t)$ задачи (0.1) подчинены A в том смысле, что выполнено следующее

Условие 2.1. При каком-либо $\varepsilon > 1/2$ и при $\varepsilon = 0$ оператор-функции $\langle B \rangle_{\tau, \varepsilon}$, $\langle B^* \rangle_{\tau, \varepsilon}$ и $\langle c(t) \rangle_{\tau, \varepsilon}$, $\langle c^*(t) \rangle_{\tau, \varepsilon}$ аргументов, соответственно, τ и (t, τ) (см. (1.6), (1.4)) сильно измеримы и локально ограничены по норме при $t, \tau \geqslant 0$.

Существует такая функция $\omega(t, \lambda) \in B(H)$, сильно непрерывная по t и целая по λ, что при любом $h \in H$: $u(t) = \omega(t, \lambda)h$ — единственное слабое решение (0.1) с начальным условием $u(0) = h$ [2]. При заданном A имеем $\omega(t, \lambda) = \omega(t, \lambda; B, c(\cdot))$. Положим

$$\tilde{\omega}(t, \lambda) = [\omega(t, \bar{\lambda})\,B^*, c^*(\cdot))]^*. \tag{2.2}$$

Укажем (этот вопрос подробнее рассмотрен в разделе 2), что

$$\cos \lambda t = \omega(t, \lambda) - \int\limits_0^t \Gamma(t, x)\,\omega(x, \lambda)\,dx, \tag{2.3}$$

где $\Gamma(t, x) \in B(H_{\sigma, 0}, H)$ (раздел 1, п. 6) при $0 \leqslant x \leqslant t < \sigma$. Операторы преобразования (2.3) рассматривались в [5].

Определим преобразования Ω и $\tilde{\Omega}$ финитных функций:

$$\varphi \in L_2(\boldsymbol{R}^+, H'),\ \psi \in L_2(\boldsymbol{R}^+, H),$$

полагая

$$\Omega_\varphi(\lambda) = \int\limits_0^\infty \varphi(t)\,\omega(t, \lambda)\,dt;\quad \tilde{\Omega}_\psi(\lambda) = \int\limits_0^\infty \tilde{\omega}(t, \lambda)\,\psi(t)\,dt. \tag{2.4}$$

Предложение 2.1. Ω и $\tilde{\Omega}$ *обратима на своих образах. Образ* Ω *содержит* $Z_2(H')$, *а образ* $\tilde{\Omega}$ — $Z_2(H)$ (*см. раздел 1, п. 8, 6*). *Множества*

$$M \equiv \Omega^{-1}(Z_2(H')),\ \tilde{M} \equiv \tilde{\Omega}^{-1}(Z_2(H)) \tag{2.5}$$

плотны, соответственно, в $L_2(\boldsymbol{R}^+, H')$ *и в* $L_2(\boldsymbol{R}^+, H)$. *При этом для любого* $\sigma > 0$ *и* $\alpha > 1/2$ *множество* $M_\sigma \equiv \Omega^{-1}(Z_2^\sigma(H'_{\sigma, 0}))$ ($\tilde{M}_\sigma \equiv \tilde{\Omega}^{-1}(Z_2^\sigma(H_{\sigma, 0}))$) *содержит все финитные функции из* $L_2(\boldsymbol{R}^+, H'_{\sigma, \alpha})$ (*из* $L_2(\boldsymbol{R}^+, H_{\sigma, \alpha})$) *с носителями в* $[0, \sigma]$.

Пусть в обозначениях (1.4)

$$G = \bigcap_{\sigma>0} D(A_{\sigma,0}), \tag{2.6}$$

а $L(G)$ — фактор-пространство $l(G)/l_0(G)$, где $l(G)$ — пространство таких линейных замкнутых операторов T в H, что

$$D(T) \cap D(T^*) \supseteq G, \; l_0(G) = \{T \in l(G) \,|\, T(G) = \{0\}\}.$$

Определение 2.1. *Отображение $R: Z \to L(G)$ называется сильно непрерывным, если при каждом $g \in G$* (2.6) *непрерывны отображения Z в H* и в H', *задаваемые соответствиями*

$$f \to R(f) g \;\; и \;\; f \to (\theta^{-1} g) R(f)$$

(*см. раздел 1, п. 2*).

Рассмотрим линейное отображение $R: Z \to L(G)$, такое, что

а) в каждом ортонормированном базисе $\{e_k\}_1^\infty \subset G$ пространства H отображение R порождает матрицу с элементами $R_{i,k} \in Z'$: $(f, R_{i,k}) = \langle e_i', R(f) e_k \rangle$; $f \in Z$;

в) $R^\mu(\cdot) \equiv R(\cdot) E_\mu$ и $R_\mu(\cdot) \equiv E_\mu R(\cdot)$ — непрерывные отображения $Z \to B(H)$, такие, что на элементах $\Phi \in Z_2^\infty(H')$ и $\Psi \in Z_2^\infty(H)$ (раздел 1, п. 8) определены, аналогично [1], билинейные формы $[\Phi R^\mu \Psi]$ и $[\Phi R_\mu \Psi]$. (Например,

$$[\Phi R^\mu \Psi] = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty (\Phi_i \Psi_k, R_{i,k}^\mu), \tag{2.7}$$

где

$$\Phi_i = \langle \Phi(\lambda), e_i \rangle, \quad \Psi_k = \langle e_k', \Psi(\lambda) \rangle,$$

$$(f, R_{i,k}^\mu) = \langle e_i', R^\mu(f) e_k \rangle \;\; (f \in Z), \; \{e_k\}_1^\infty —$$

ортонормированный базис в H);

с) для любых $\Phi \in Z_2(H')$, $\Psi \in Z_2(H)$ (раздел 1, п. 8) существует $[\Phi R \Psi]$ общий предел величин $[\Phi R^\mu \Psi]$ и $[\Phi R_\mu \Psi]$ при $\mu \to \infty$.

Теорема 2.1. *Краевая задача* (0.1) *порождает* (*единственную*) *обобщенную спектральную матрицу R — такое сильно непрерывное линейное отображение $Z \to L(G)$, что выполнены условия а) — с), и для любых $\varphi \in M$, $\varphi \in \widetilde{M}$* (2.5) *имеет место обобщенное равенство Парсеваля*

$$\int_0^\infty \langle \varphi(t), \psi(t) \rangle dt = [\Omega_\varphi R \widetilde{\Omega}_\psi]. \tag{2.8}$$

При этом форма $[\cdot R \cdot]$ при любых $\sigma, \tau > 0$ непрерывна на $Z_2^\sigma(H_{\sigma,0}') \times Z_2^\tau(H_{\tau,0})$ (*раздел 1, пп. 8, 6*). *В произвольном ортонормированном базисе $\{e_k\}_1^\infty \subset G$ пространства H элементы матрицы отображения R (см. а)) и матрицы ядра оператора преобразования* (2.4) *связаны формулами*

$$R_{i,k} = \delta_{i,k} - C_{\Gamma_{i,k}} \;\; (i, k \in N), \tag{2.9}$$

где $C_{\Gamma_{i,k}}$ — *обобщенное преобразование Фурье функции* $\Gamma_{i,k}(x) = = \langle e_i', \Gamma(x, 0) e_k \rangle$ (*см. раздел 1, п. 10*).

Следствие 2.1. *Пусть* $\Omega_\varphi \in Z_1(H')$ (*раздел 1, п. 8*). *Тогда* $\varphi(t)$ — *сильно непрерывна и при каждом* $g \in G$

$$\langle \varphi(t), g \rangle = [\Omega_\varphi R(\tilde{\omega}(t, \cdot) g)]. \tag{2.10}$$

Замечание 2.1. Для обобщенной спектральной матрицы краевой задачи (0.1) аналогичная (2.7) формула

$$[\Phi R \Psi] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\Phi_i \Psi_k, R_{i,k}) \tag{2.11}$$

справедлива либо, когда при $\sigma, \tau > 0$:

$$\Phi \in \bigcap_{s \geqslant \sigma} Z_2^\sigma(H_{s,0}'), \quad \Psi \in \bigcap_{t \geqslant \tau} Z_2^\tau(H_{t,0}),$$

а $\{e_k\}_1^\infty \subset G$, либо в базисе из собственных векторов оператора A для любых $\Phi \in Z_2(H')$, $\Psi \in Z_2(H)$ (если такой базис существует).

Следующая теорема обобщает теорему единственности в обратной задаче спектрального анализа оператора Штурма — Лиувилля. Для самосопряженного случая такое обобщение получено в [5].

Теорема 2.2. *Операторные коэффициенты* B *и* $c(t)$ *краевой задачи* (0.1) *однозначно восстанавливаются по ее обобщенной спектральной матрице* R *при заданном* A.

Развитая выше теория применима к скалярной задаче

$$u_{tt} = u_{xx} + v(t, x) u - \lambda^2 u \ (t \in \boldsymbol{R}^+, \ x \in \boldsymbol{R}), \quad u_t(0, x) = B(x) u(0, x) \tag{2.12}$$

при следующих условиях; $v(t, x)$ измерима на (t, x)-плоскости и при каждом $t \in \boldsymbol{R}^+$ функция $v(t, x)$ является сужением на вещественную ось целой функции $v(t, z)$. В каждом бесконечном параллелепипеде $0 < t < T$, $x \in \boldsymbol{R}$, $|y| \leqslant \sigma - v(t, x + iy)$ как функция переменных t, x, y ограничена; $B(x)$ — сужение на вещественную ось целой функции $B(z)$, которая ограничена в каждой бесконечной полосе: $|\operatorname{Im} z| \leqslant \sigma$.

3. Вспомогательные результаты

Предложение 3.1 [5]. *При* $\alpha \geqslant 1/4$ *существует оператор, преобразующий* $\cos \lambda t$ *в* $\omega(x, \lambda) A^{-\alpha}$ *по формуле*

$$\omega(x, \lambda) A^{-\alpha} = A^{-\alpha} \cos \lambda x - \int_0^x K_\alpha(x, t) \cos \lambda t dt, \tag{3.1}$$

причем ядро $K_\alpha(x, t)$ *сильно непрерывно в области*

$$D(\sigma) = \{(x, t) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leqslant t < x \leqslant \sigma\} \tag{3.2}$$

при любом $\sigma > 0$. *При* $\alpha = 1$ *ядро* $K_1(x, t)$ *сильно непрерывно в* $\overline{D(\infty)}$ *и*

$$K_1(x, x) = -x + BA^{-1} + \frac{1}{2}\int_0^x c(t) A^{-1} dt. \qquad (3.3)$$

Лемма 3.1. *Пусть* $\alpha \in (1/2, \varepsilon]$, где ε — *из условия 2.1. Тогда 1) при любом* $\sigma > 0$ $\iint_{D(\sigma)} \| K_\alpha(x, t)\|^2 dx dt < \infty$, *а* $\int_0^x \| K_\alpha(x, t)\| \times \times dt \leqslant K_\sigma < \infty$ *при* $x \leqslant \sigma$; *2) если ядра операторов преобразования вида (3.1)* $K_\alpha(x, t; \mu)$ *отвечают коэффициентам* B_μ, $c_\mu(t)$, *причем при* $\mu \to \infty$: $B_\mu \xrightarrow{s} B$, $c_\mu(t) \xrightarrow{s} c(t)$ *при каждом* t *и* $\| c_\mu(t)\| \leqslant \leqslant K_t < \infty$ *при всех* $0 \leqslant t \leqslant T$, *то в области* $D(\infty)$ (3.2) $K_\alpha(x, t; \mu) \xrightarrow{s} K_\alpha(x, t)$ $(\mu \to \infty)$ *и при всех* μ: $\| K_\alpha(x, t; \mu)\| \leqslant g(x, t)$ *для некоторой функции* $g(x, t) \in L_2^{\mathrm{loc}}(D(\infty)) \cap C(D(\infty))$.

Предложение 3.2. *Для всякого* $\sigma > 0$ *существует оператор, преобразующий на интервале* $[0, \sigma]$ *оператор-функцию* $\omega(t, \lambda)$ *(2.1) в* $A_{\sigma, 0}^{-1} \cos \lambda t$ *(1.4) по формуле*

$$A_{\sigma,0}^{-1} \cos \lambda x = A_{\sigma, 0}^{-1} \omega(x, \lambda) - \int_0^x \Gamma_\sigma(x, t)\, \omega(t, \lambda)\, dt. \qquad (3.4)$$

При этом ядро $\Gamma_\sigma(x, t)$ *сильно непрерывно в области*

$$T_\sigma = \{(x, t) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant \sigma\} \setminus (\sigma, 0), \qquad (3.5)$$

а вне $T_\sigma : \Gamma_\sigma(x, t) = 0$ *по определению.*

Доказательство дано в [5] (при $B = 0$). Существование $\Gamma_\sigma(x, t)$ при любом B можно установить предельным переходом от случая ограниченных операторных коэффициентов, пользуясь тем, что при $A \in B(H)$: $2A_{\sigma, 0}\Gamma_\sigma(x, t) = 2\Gamma(x, t) = BR(0, 0; x,

$$t) + \Gamma(x - t, 0) + \int_0^{\frac{x+t}{2}} (-A + c(\xi))\, R(\xi, \xi; x, t)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^{x-t} \Gamma(\xi, 0)\, \{R_\eta(\xi, 0; x, t) - BR(\xi, 0; x, t)\}\, d\xi,$$

откуда при $t = 0$ получается уравнение для нахождения $\Gamma(x, 0)$; $R(\xi, \eta; x, t)$ — функция Римана уравнения $u_{\eta\eta} - u_{\xi\xi} = u \cdot (A - c_1(\eta))$ с таким $c_1(\eta)$, что $c_1(\eta) = c(\eta)$ при $\eta \geqslant 0$.

Лемма 3.2. *Положим (считая* $\sigma + \tau > 0$*)*

$$\Gamma_{\sigma, \tau}(x, t) = \langle \Gamma_{\sigma+\tau}(x, t) \rangle_{\sigma\, 0} \qquad (3.6)$$

(см. (1.6)). Тогда 1) функция $\Gamma_{\sigma, \tau}(x, t)$ *сильно непрерывна в области* $T_{\sigma+\tau}$ *(3.5),* $\iint_{R^2} \| \Gamma_{\sigma, \tau}(x, t)\|^2 dx dt < \infty$ *и найдется такая функция* $g_{\sigma, \tau}(x) \in L_1(\boldsymbol{R})$, *что при всех* t: $\| \Gamma_{\sigma, \tau}(x, t)\| \leqslant g_{\sigma, \tau}(x)$;

2) *в области* $T_{\sigma+\tau} \cap T_{s+g}$ *(3.5) при* $\sigma+\tau,\ s+g>0$ *имеет место равенство*

$$A_{s,0}^{-1}\Gamma_{\sigma,\tau}(x,\ t)\,A_{g,0}^{-1}=A_{\sigma,0}^{-1}\Gamma_{s,g}(x,\ t)\,A_{\tau,0}^{-1}; \tag{3.7}$$

3) *если в (2.1) коэффициенты* B *и* $c(t)$ *заменить на*

$$B_\mu=E_\mu B E_\mu \text{ и } c_\mu(t)=E_\mu c(t)\,E_\mu \tag{3.8}$$

(раздел 1, п. 5), то соответствующие ядра $\Gamma_{\sigma,\tau}(x,\ t;\ \mu)$ *при* $\mu\to\infty$ *поточечно сильно сходятся к* $\Gamma_{\sigma,\tau}(x,\ t)$ *и найдется такая* $g_{\sigma,\tau}(x,\ t)\in L_2(\boldsymbol{R}^2)\cap C(T_{\sigma+\tau})$ *(см. (3.5)), что* $\|\Gamma_{\sigma,\tau}(x,\ t;\ \mu)\|\leqslant\leqslant g_{\sigma,\tau}(x,\ t)$ *при всех* μ.

Следствие 3.1. В обозначениях (2.3) $\Gamma(x,\ t)=A_{\sigma,0}\Gamma_\sigma(x,\ t)$.

Из (3.1) и леммы 3.1, 1) вытекает, что для произвольной финитной функции $\varphi\in L_2(\boldsymbol{R}^+,\ H')$ имеет место равенство

$$\Omega_\varphi(\lambda)\,A^{-\alpha}=C_{K_\alpha}[\varphi]\ (\lambda) \tag{3.9}$$

(см. (2.4), (1.7)), где $1/2<\alpha\leqslant\varepsilon$, ε — из условия 2.1, а

$$K_\alpha[\varphi](t)=\varphi(t)\,A^{-\alpha}+\int\limits_t^\sigma\varphi(x)\,K_\alpha(x,\ t)\,dx. \tag{3.10}$$

Если $\Phi\in Z_2^\sigma(H'_{\sigma,0})$, то в силу теоремы Винера — Пэли найдется в точности одна такая $f\in L_2(\boldsymbol{R}^+,\ H'_{\sigma,0})$, что

$$C_f(\lambda)=\Phi(\lambda) \tag{3.11}$$

и $f(t)=0$ при $t>\sigma$.

Лемма 3.3. *Фиксируем* $\sigma>0$. *Пусть* $\Phi\in Z_2^\sigma(H'_{\sigma,0})$ *(раздел 1, п. 8, 6), тогда в обозначениях (2.4)*

$$\Phi(\lambda)=\Omega_{\Gamma[f]}(\lambda), \tag{3.12}$$

где f *определяется (3.11),* $\Gamma[f]=\Gamma_\sigma[fA_{\sigma,0}]$ — оператор, определенный на элементах $f\in L_2(\boldsymbol{R}^+,\ H'_{\sigma,0})$, имеющих носитель в $[0,\ \sigma]$, а

$$\Gamma_\sigma[\varphi](t)=\varphi(t)\,A_{\sigma,0}^{-1}-\int\limits_t^\sigma\varphi(x)\,\Gamma_\sigma(x,\ t)\,dx \tag{3.13}$$

(см. (3.4)). Оператор Γ обратим на своем образе M_σ с помощью оператора $K[\cdot]=K_\alpha[\cdot]\,A^\alpha$ (см. (3.10)). Для функции $\varphi\in L_2(\boldsymbol{R}^+,\ H')$: $\Omega_\varphi\equiv 0$ тогда и только тогда, когда $K_\alpha[\varphi]\equiv 0$.

Лемма 3.4. *Для функции* $\varphi\in C(\boldsymbol{R}^+,\ H'_{\sigma,0})$ *(раздел 1, п. 6) с носителем в* $[0,\ \sigma]$ *имеем* $\Gamma[\varphi]\in C(\boldsymbol{R}^+,\ H')$ *и* $\Gamma[\varphi](t)=0$ *при* $t>\sigma$.

Лемма 3.5. *В области* T_σ *(3.5) в обозначениях (1.4), (1.6):*

$$A_{\sigma,0}^{-1}<K_\alpha(x,\ t)>_{0,-\alpha}-A^{-\alpha}\Gamma_\sigma(x,\ t)=\int\limits_t^x<K_\alpha(x,$$

$$y)>_{-\sigma,-\alpha}\Gamma_\sigma(y,\ t)\,dy. \tag{3.14}$$

Доказательство этой леммы основано на предельном переходе от случая ограниченных операторных коэффициентов: см. леммы 3.1 (II) и (3.2) (III).

Лемма 3.6. *Если за область определения оператора* K_α *(3.10) принять множество всех финитных функций, принадлежащих* $L_2(\boldsymbol{R}^+, H')$, *то* $\ker K_\alpha = \{0\}$.

Замечание 3.1. Свойства операторов преобразования, связывающих $\cos\lambda x$ и $\tilde{\omega}(t, \lambda)$ (2.2), непосредственно вытекают из предложений 3.1, 3. 2 и лемм 3.1, 3.2. Укажем формулы:

$$A^{-\alpha}\tilde{\omega}(x, \lambda) = A^{-\alpha}\cos\lambda x + \int_0^x \cos\lambda t \tilde{K}_\alpha(x, t)\,dt; \tag{3.15}$$

$$\cos\lambda x A_{\sigma, 0}^{-1} = \tilde{\omega}(x, \lambda) A_{\sigma, 0}^{-1} - \int_0^x \tilde{\omega}(t, \lambda)\tilde{\Gamma}_\sigma(x, t)\,dt \tag{3.16}$$

$(0 \leqslant x < \sigma)$. В области $T_{\sigma+\tau}$ (см. (1.4), (3.5))

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma, \tau}(x, t) = \langle \tilde{\Gamma}_{\sigma+\tau}(x; t)\rangle_{-\sigma, 0}. \tag{3.17}$$

Для функции ψ с носителем в $[0, \sigma]$

$$\tilde{\Gamma}_\sigma[\psi](t) = A_{\sigma, 0}^{-1}\psi(t) - \int_t^\sigma \tilde{\Gamma}_\sigma(x, t)\psi(x)\,dx; \tag{3.18}$$

$$\tilde{K}_\alpha[\psi](t) = A^{-\alpha}\psi(t) - \int_t^\sigma \tilde{K}_\alpha(x, t)\psi(x)\,dx. \tag{3.19}$$

Все утверждения лемм 3.3—3.6, относящиеся к тройке отображений Ω, K, Γ с очевидными видоизменениями, справедливы по отношению к тройке $\tilde{\Omega}$, $\tilde{K}$, $\tilde{\Gamma}$.

Лемма 3.7. *В прямоугольнике* $[0, \sigma]\times[0, \tau]$ *для функции*

$$f_{\sigma, \tau}(x, y) = \begin{cases} -\Gamma_{\sigma, \tau}(x, y) + \int_0^y \Gamma_\sigma(x, t)\tilde{\Gamma}_\tau(y, t)\,dt, & x \geqslant y, \\ -\tilde{\Gamma}_{\sigma, \tau}(x, y) + \int_0^x \Gamma_\sigma(x, t)\tilde{\Gamma}_\tau(y, t)\,dt, & x \leqslant y \end{cases} \tag{3.20}$$

(см. (3.4), (3.7), (3.16), (3.18)) имеет место равенство

$$f_{\sigma, \tau}(x, y) = -\frac{1}{2}[\Gamma_{\sigma, \tau}(x+y, 0) + \Gamma_{\sigma, \tau}(|x-y|, 0)], \tag{3.21}$$

причем, если $0 \leqslant x < \sigma+\tau$, $\sigma > 0$, $\tau \geqslant 0$, *то*

$$\Gamma_{\sigma, \tau}(x, 0) = \tilde{\Gamma}_{\sigma, \tau}(x, 0). \tag{3.22}$$

Следствие 3.2. $\int_0^\sigma dx \int_0^\tau \|f_{\sigma, \tau}(x, y)\|^2 dy < \infty$.

Лемма 3.8. *При $\sigma, \tau > 0$ определим оператор $F_{\sigma,\tau}$: $L_2(0, \sigma; H') \to L_2(0, \tau; H')$ равенством*

$$F_{\sigma,\tau}[\varphi](y) = \varphi(y) A^{-1}_{\sigma+\tau, 0} + \int_0^\sigma \varphi(z) f_{\sigma,\tau}(z, y)\, dz \qquad (3.23)$$

(см. (3.20)). Тогда

1) $F_{\sigma,\tau}$ обратим на своем образе при $0 < \sigma \leqslant \tau < \infty$, а при $\infty > \sigma > \tau > 0$ оператор — сужение $F_{\sigma,\tau}$ на $L_2(0, \tau; H')$ обратим на своем образе;

2) если при некотором $x = \sigma \geqslant \tau$ положить $\varphi(z) = g < K_\alpha(x, z) >_{-\sigma, -\alpha}$ (см. (3.1), (1.6)), где $g \in H'_{\sigma, 0}$ (раздел 1, п. 6)$1/2 < \alpha \leqslant \varepsilon$, ε — из условия 2.1, то

$$F_{\sigma,\tau}[\varphi](y) = -gA^{-\alpha} f_{\sigma,\tau}(x, y). \qquad (3.24)$$

4. Схемы доказательств основных результатов

Для предложения 2.1. Инъективность Ω и $\tilde{\Omega}$ следует из лемм 3.3 и 3.6 и замечания 3.1. Остальные утверждения предложения 2.1 вытекают из леммы 3.3, формулы (3.10) (см. также замечание 3.1) и из уже установленной инъективности Ω ($\tilde{\Omega}$).

Для теоремы 2.1. Для $\Psi \in Z_1^\tau(H_{\tau, 0})$ положим

$$[R\Psi] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{A_{-\tau, 0} - C_{\Gamma_\tau(\cdot, 0)}(\lambda)\} A_{\tau, 0} \Psi(\lambda)\, d\lambda$$

(см. (3.4) и раздел 1, п.10). Здесь $\Gamma_\tau(\cdot, 0)$ и $A_{-\tau, 0}$ можно, сохраняя равенство, заменить на $\Gamma_t(\cdot, 0)$ и $A_{-t, 0}$ с любым $t \geqslant \tau$. Это означает, что $[R\Psi] \in H$ конкретно определено для $\Psi \in Z_1(H)$ (τ можно взять любым).

Определим $R: Z \to L(G)$, полагая $[R(f)]g = [R(f \cdot g)] \in H$ ($f \in Z$, $g \in G$); R — сильно непрерывно, удовлетворяет условиям а), в) раздела 2 и обладает свойством (2.9). Условие с) и равенство (2.8) достаточно проверить на функциях $\varphi \in M_\sigma$, $\psi \in \tilde{M}_\tau$ (см. предложение 2.1). Пусть $f = K[\varphi] A_{\sigma, 0}$, $g = A_{\tau, 0} \tilde{K}[\psi]$, а $s = \sigma + \tau$. Из (3.12), лемм 3.3, 3.6, 3.7, равенства Парсеваля, правила преобразования Фурье, свертки и теоремы Лебега о мажорированной сходимости следует, что $\int_0^\infty < \varphi(t), \psi(t) > dt = \int_0^\infty < f(t) A^{-1}_{\sigma, 0}, A^{-1}_{\tau, 0} g(t) > dt + \int_0^\sigma dx \int_0^\tau < f(x), f_{\sigma,\tau}(x, y) g(y) > dy = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty < \Omega_\varphi(\lambda) \times$

$$\times A_{\sigma, 0} \} A_{-s, 0} - C_{\Gamma_{s,0}(\cdot, 0)}(\lambda)\} A_{\tau, 0} \tilde{\Omega}_\psi(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \lim_{\mu \to \infty} \sum_{i, k=1}^\infty (\Phi_i \Psi_k, R^\mu_{i, k}),$$

где символ суммы подразумевает последовательное суммирование по i, k в любом порядке. Из этих равенств вытекает (2.8) и непрерывность формы $[\cdot R\cdot]$, указанная в теореме.

Для теоремы 2.2. Допустим, R является обобщенной спектральной матрицей двух, возможно, различных краевых задач вида (0.1) с коэффициентами B_j, $c_j(t)$, где $j=1$, 2 — номер задачи. Тогда из (2.9), следствия 3.1 и (3.7) вытекает, что $\Gamma^1_\sigma(x, 0)=\Gamma^2_\sigma(x, 0)$ $(0\leqslant x<\sigma$, σ — любое, верхний индекс указывает, к какой задаче относится ядро оператора преобразования. Отсюда на основании лемм 3.7, 3.8 выводим $K^1_\alpha(x, t)=K^2_\alpha(x, t)$ $(x, t)\in D(\infty)$, см. (3.2), $\alpha\geqslant 1/4$. При $\alpha=1$ из этого равенства и 3.3 получаем $B_1=B_2$, $c_1(t)=c_2(t)$ для почти всех t.

Список литературы: 1. *Марченко В. А., Рофе — Бекетов Ф. С.* Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов.— ДАН СССР, 1958, № 120, № 5, с. 520—525. 2. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка с операторными коэффициентами.— ДАН СССР, 1969, 184, № 4, с. 774—777. 3. *Козел В. А., Лундина Д. Ш., Марченко В. А.* Обобщенная спектральная матрица трехмерного несамосопряженного оператора Шредингера.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 27. Харьков 1976, с. 71—90. 4. *Березанский Ю. М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, «Наукова думка». 798 с. 5. *Андрошук А. А.* Об обратной задаче спектрального анализа для уравнения Штурма — Лиувилля с неограниченным операторным потенциалом.— В кн.: Применения функционального анализа к задачам математической физики. Вып. 3. Киев, 1973, с. 1—55.

Поступила 22 июля 1976 г.