УДК 517.925.6 *А. Э. ЕРЕМЕНКО*

МЕРОМОРФНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА БРИО—БУКЕ

Важной задачей аналитической теории дифференциальных уравнений (д. у.) является изучение однозначных решений. Большое число работ посвящено алгебраическим д. у., общее решение которых однозначно в C. Более сложная задача — изучение д. у., обладающих частными мероморфными решениями.

В 1920 г. Й. Мальмквист полностью исследовал алгебраические д. у. первого порядка, обладающие частным мероморфным решением. Имеющаяся информация о частных решениях д. у. высших порядков крайне скудная. В связи с этим естественно ограничиться каким-либо простейшим классом уравнений.

Настоящая статья посвящена д. у. типа Брио—Буке $P(y^{(k)}, y) = P_0(y)(y^{(k)})^m + \cdots + P_m(y) = 0$ (1), где P — полином от двух переменных. При $k = 1$ — это классические уравнения Брио—Буке, которые могут иметь мероморфные в C решения следующих трех типов: эллиптические функции, рациональные функции, рациональные функции от $\exp(az)$, $a \in C$. Перечисленные типы функций назовем функциями класса W. Он возникает также при изучении алгебраических теорем сложения.

Э. Пикар [1] доказал, что при $k = 2$ любое мероморфное решение уравнения (1) также принадлежит классу W. Изучением порядка роста целых и мероморфных решений некоторых типов уравнений (1), а также свойств неоднозначных решений этих уравнений занимался Э. Хилле [2—3].

Кажется правдоподобным, что всякая мероморфная функция, удовлетворяющая уравнению (1), принадлежит классу W. Мы докажем это в двух случаях: если род многочлена P равен 1 теорема 2), и если k нечетное, а решение не целое (теорема 3). Теорема 1 дает легко проверяемые необходимые условия существования целых и мероморфных решений д. у. (1).

Без пояснений используются простейшие факты и стандартные обозначения теории Р. Неванлинны [4, 5] и теории алгебраических функций [6].

Всюду далее предполагается, что многочлен P в (1) неприводим, как многочлен от двух переменных, что не уменьшает общности при исследовании свойств решений. Уравнению (1) соответствует алгебраическая функция $p(y)$, определяемая равенством $P(p, y)=0$. Пусть F — риманова поверхность этой функции, накрывающая плоскость $\overline{C_y}$. Будем представлять F как множество пар элементов (p, y), удовлетворяющих уравнению $P(p, y)=$ $=0$.

Всякое мероморфное решение $y(z)$ уравнения (1) индуцирует накрывающее отображение $f: \boldsymbol{C}_z \to F$. Это отображение униформизует риманову поверхность F при помощи пары функций $(y^{(k)}, y)$. Нам потребуется следующая.

Теорема А. (Пикар). *Пусть мероморфное отображение $f: \boldsymbol{C} \to F$ не рационально. Тогда род поверхности F равен 0 или 1. Если род F равен 1, то каждая точка из F имеет бесконечное число прообразов в $\boldsymbol{C}$. Если род F равен 0, то каждая точка из F, за исключением самое большее двух, имеет бесконечное число прообразов.*

Обычно теоремой Пикара называют третье утверждение в этой теореме. Первое утверждение было доказано Э. Пикаром в 1887 г. и сразу же применено к уравнению (1) в [1]. В приведенном виде теорему А можно найти в книге [7, с. 76 и замечание на с. 61].

Из первого утверждения теоремы А следует, что если д. у. (1) имеет мероморфное решение, то род F равен 0 или 1 [1].

Каждой точке $M \in F$, лежащей над $y=\infty$, соответствует асимптотическое равенство $p(y)=(a+o(1))\,y^q$, $y \to \infty$, $a=$ $=a(M) \in \boldsymbol{C}$ (2), $q=q(M)$ — рациональное число. Буквой M без индекса всегда будем обозначать точку на F, проектирующуюся в $y=\infty$.

Теорема 1. *Пусть д. у. (1) имеет трансцендентное мероморфное решение $y(z)$. Тогда $P_0 \equiv \mathrm{const}$, а числа q в (2) обладают следующими свойствами:*

1°. *$q(M)=1$ не более, чем для двух точек M; для всех остальных точек $q(M)=1+k/n$, где n — натуральное число;*

2°. *Для того, чтобы функция $y(z)$ была целой, необходимо и достаточно, чтобы поверхность F была рода 0 и имела не более двух точек над $y=\infty$, причем в каждой из этих точек $q=1$;*

3°. *Если $y(z)$ имеет полюс порядка n, то для одной из точек M выполняется $q(M)=1+k/n$; если же для одной из точек M выполняется $q(M)=1+k/n$, то $y(z)$ имеет бесконечное число полюсов порядка n.*

Числа $q(M)$ в (2) определяются непосредственно по многочлену P при помощи диаграммы Ньютона [6, § 38]. В рассматриваемом случае диаграмма Ньютона строится так. Каждому члену $a_{ij}p^iy^j$ многочлена $P(p, y)$ ставим в соответствие точку в первом квадранте с координатами i, j. Добавим еще точки (0, 0), (m, 0) и рассмотрим выпуклую оболочку полученного множества. Рассмотрим все стороны этого многоугольника, кроме вертикальных отрезков и отрезка оси i. Угловые коэффициенты этих сторон, взятые с противоположным знаком, есть в точности числа $q(M)$ в (2). Если уравнение (1) имеет мероморфное решение, то по теореме 1 $\deg P_0 = 0$ и $q(M) \leqslant 1 + k$ для всех точек M. Поэтому диаграмма Ньютона лежит не выше прямой $j = -(1+k)(i-m)$, откуда получаем $\deg P_i \leqslant i(1+k)$, $i = 0 \ldots, m$ (3).

Если д. у. (1) имеет целое решение, то для всех M выполняется по теореме 1 $q(M) = 1$. Из диаграммы Ньютона получаем, что

$$\deg P_i \leqslant i, \quad i = 0, \ldots, m; \ \deg P_m = m. \tag{4}$$

В большинстве теорем Э. Хилле [2, 3] условия (3), (4) предполагаются выполненными à priori. Теорема 1 показывает, что эти предположения излишни. Из теоремы 5 работы [3] следует, что всякое целое решение уравнения 1 есть функция экспоненциального типа. Это также легко получается из теории Вимана—Валирона [4, гл. 5] без использования теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Пусть $P_0 \not\equiv \mathrm{const}$. Алгебраическая функция $p(y)$ имеет в этом случае полюс $M_0 \in F$, причем M_0 проектируется в точку $a \in \boldsymbol{C}_y$, один из корней многочлена P_0. Очевидно, что точка M_0 не принадлежит образу плоскости $\boldsymbol{C}$ при отображении f. Рассмотрим достаточно малую ε — окрестность $V \subset F$ точки M_0 и обозначим через D компоненту прообраза $f^{-1}(V)$. Множество $\overline{V} \setminus M_0$ некомпактно, следовательно, область D неограничена. Рассмотрим в D аналитическую функцию $w(z) = (y(z) - a)^{-1}$, где $y(z)$ — мероморфное решение уравнения (1). Имеем $|w| = \varepsilon^{-1}$ на ∂D и $|w| > \varepsilon^{-1}$ в D, поэтому $w(z)$ неограничена в D. Поскольку M_0 — полюс алгебраической функции $p(y)$, имеем

$$y^{(k)}(z) \sim \mathrm{const} \cdot w^{\varkappa}(z), \ z \in D, \ \varkappa > 0, \ |w| \to \infty. \tag{5}$$

Покажем, что (5) ведет к противоречию. Для этого продифференцируем соотношение $y(z) = w^{-1}(z) + a$ по z k раз, и получим

$$y^{(k)} = \frac{1}{w} Q\left(\frac{w'}{w}, \frac{w''}{w}, \ldots, \frac{w^{(k)}}{w}\right), \tag{6}$$

где Q — многочлен от k переменных. Далее мы используем теорию, изложенную в § 17 книги [8]. Пусть $G \subset \boldsymbol{C}_t$ — полный образ области D при отображении $t = \log z$. Область G пересекается с каждой прямой $\operatorname{Re} t = x$ при достаточно больших x. Рассмотрим в области G аналитическую функцию $v(t) = w(e^t)$. Легко видеть, что эта функция ограничена на ∂G и на пересечении каждой вертикальной прямой с G. При этом $v(t)$ неограничена в G. Положим

$$S(x) = \max_{\operatorname{Re} t = x,\ t \in G} |v(t)|, \quad L(x) = \frac{S'(x)}{S(x)}.$$

(Максимум в определении $S(x)$ всегда достигается в некоторой точке $\zeta = \zeta(x) \in G$; в определении $L(x)$ и далее в аналогичных случаях берется правосторонняя производная). По теореме 1.4.17 из [8], имеем (формула (5.4.17)):

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \notin E}} \frac{1}{L^j(x)} \frac{v^{(j)}(\zeta)}{S(x)} = 1, \ j = 1, 2, \dots, \tag{7}$$

где E — множество конечной меры на полуоси $x > 0$. (В главе III книги [8] все рассуждения проводятся для случая, когда v определена в полуплоскости $\operatorname{Re} t > 0$. Анализ рассуждений, предшествующих теореме 1.4.17, показывает, что все они проходят и в нашем случае. В проверке нуждается только тот факт, что кружок (5.2.17) в формулировке теоремы 1.2.17 содержится в области G. Это следует из формулы (9.2.17). Дальнейшие рассуждения из § 17 [8] переносятся дословно).

Выведем из (7) подобное соотношение для функции w. Положим $M(r, w) = \max\{|w(z) : z \in D, |z| = r\}$, $K(r) = rM'(r, w)/M(r, w)$. Учитывая, что $v(t) = w(\exp t)$, и рассуждая, как в доказательстве теоремы 1.10.17 из [8], получаем из (7) $|w^{(j)}(s)| = (1 + o(1)) \times \times \frac{K^{(j)}(r)}{r^j} M(r, w)$, $j = 1, 2, \dots$ (8), где $r = |s| \to \infty$ вне множества конечной логарифмической меры; s — точка, в которой $|w(s)| = M(r)$. По лемме 1.5.2 из [8] для всякого $a > 0$ выполняется

$$(K(r))^a = o(M(r, w)), \tag{9}$$

при $r \to \infty$ вне множества конечной логарифмической меры. Учитывая (8), (9), получаем из (6), что $y^{(k)}(s) \to 0$ на некоторой последовательности (s_j), $|s_j| \to \infty$. Но $w(s_j) = M(|s_j|, w) \to \infty$, что противоречит (5). Противоречие показывает, что $P_0 \equiv \mathrm{const}$.

Для доказательства остальных утверждений теоремы 1 рассмотрим точку $M \in F$, проектирующуюся в $y = \infty$. Если M имеет хотя бы один прообраз $z_0 \in \mathbf{C}$ при отображении $f: \mathbf{C} \to F$, то z_0 — полюс функции $y(z)$. Имеем $y(z) \sim \mathrm{const}\,(z - z_0)^{-n}$, где n — порядок полюса. Тогда $y^{(k)}(z) \sim \mathrm{const}\,(z - z_0)^{-n-k}$ при $z \to z_0$. Следовательно, $q(M) = 1 + k/n$ в (2).

Пусть теперь точка M имеет конечное число прообразов в C. Покажем, что число $q(M)$ в этом случае равно 1. Рассмотрим окрестность точки M, т. е. компоненту V множества $F \cap \{y: |y| > \varepsilon^{-1}\}$ такую, что $M \in V$. Если ε достаточно мало, то компонента D прообраза $f^{-1}(V)$, которая не ограничена, не содержит полюсов функции $y(z)$, причем $|y| = \varepsilon^{-1}$ на ∂D, и $y(z)$ не ограничена в D. Применяя формулы (8), (9) к функции $y(z)$ вместо $w(z)$, получаем, что $y^{(k)}(s) = O((y(s))^{1+\eta})$, $s \to \infty$ при любом $\eta > 0$, следовательно, $q \leqslant 1$ в (2).

Если $q(M) < 1$, снова применяем (8), учитывая, что $K(r)$ не убывает:

$$M^q(r, y) = (|y(s)|)^q \sim \text{const}\,|y^{(k)}(s)| \geqslant \text{const} \cdot r^{-k} M(r, y),$$

$$M(r, y) = O(r^\alpha), \quad r \to \infty, \ \alpha > 0. \tag{10}$$

По теореме А поверхность F рода нуль, следовательно, F бирационально эквивалентна сфере $\bar{C}_t$. Это означает, что существует рациональная функция $t = R(p, y)$, которая отображает F взаимно однозначно на $\bar{C}_t$. Можно считать, что точка $M \in F$ переходит в ∞ при этом отображении. Тогда функция $t(z) = R(y^{(k)}(z), y(z))$ (11) целая, а из (11), (10) получается, что $|t(z)| \leqslant \text{const}\,|z|^\beta$, $\beta > 0$. Следовательно, $t(z)$ — многочлен. Очевидно, что числитель и знаменатель $R(p, y)$ взаимно просты с $P(p, y)$. Поэтому после исключения $y^{(k)}$ из равенств (1), (11) получится $Q(y(z), z) = 0$, где $Q \not\equiv 0$ — многочлен. Тогда $y(z)$ не может быть трансцендентной функцией.

Мы показали, что для точки $M \in F$, проектирующейся в $y = \infty$, есть две взаимно исключающие возможности: либо $q(M) = 1$, и точка M не имеет прообразов в C, либо $q(M) = 1 + k/n$, и M имеет бесконечное число прообразов — полюсов порядка n функции $y(z)$. Вместе с теоремой А это дает 1°, 2°, 3° теоремы 1.

Теорема 2. *Если F — поверхность рода* 1, *то всякое мероморфное решение уравнения* (1) *есть эллиптическая функция.*

Доказательство. Универсальное накрытие $C \to F$ поверхности рода 1 осуществляется парой эллиптических функций Φ_1 и Φ_2 с одинаковыми решетками периодов. Если уравнение (1) имеет мероморфное решение $y(z)$, то для пары функций $y(z)$, $y^{(k)}(z)$, осуществляющих накрытие $f: C \to F$, справедливо

$$y(z) = \Phi_1(\varphi(z)), \quad y^{(k)}(z) = \Phi_2(\varphi(z)), \tag{12}$$

где φ — целая функция (это было отмечено Э. Пикаром [1]). Нужно доказать, что $\varphi(z)$ — линейная функция. Пусть это не так. Дифференцируя первое соотношение (12) k раз, и вычитая второе соотношение (12), получаем $\Phi_1^{(k)}(\varphi(z))\,g_k(z) + \cdots + \Phi_1'(\varphi(z)) \times g_1(z) - \Phi_2(\varphi(z) \equiv 0$. Здесь функции $g_j(z)$ суть произведения производных от $\varphi(z)$ и постоянных множителей. Например, $g_k(z) =$

$= (\varphi'(z))^k \not\equiv \mathrm{const}$, если φ не линейна. Функции $\Phi_1, \ldots, \Phi_1^{(k)}$ линейно-независимы над C. Функция Φ_2 либо линейно-независима от $\Phi_1, \ldots, \Phi_1^{(k)}$, либо является их линейной комбинацией с постоянными коэффициентами. Во втором случае подставим вместо Φ_2 эту линейную комбинацию и сгруппируем члены с одинаковыми эллиптическими функциями. Получится соотношение

$$\psi_1(\varphi(z))\, h_1(z) + \cdots + \psi_n(\varphi(z))\, h_n(z) \equiv 0, \qquad (13)$$

где число n удовлетворяет условию $1 \leqslant n \leqslant k+1$; ψ_j — линейно-независимые над C эллиптические функции с общей решеткой периодов Γ; h_j — целые функции, выражающиеся рационально через функцию $\varphi(z)$ и ее производные. Хотя бы одна из функций h_j отлична от постоянной.

Покажем, что соотношение (13) с такими свойствами невозможно. Пусть X_0 — множество валироновских исключительных значений функции $\varphi(z)$. Это значит, что при $a \notin X_0$

$$N(r, a, \varphi) \sim T(r, \varphi), \quad r \to \infty. \qquad (14)$$

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — трансляции множества X_0 на все периоды решетки Γ. Положим $X = \bigcup_{j=0}^{\infty} X_j$. Известно, что X_0 — множество плоской меры 0 [5, с. 151]. Поскольку ψ_j линейно-независимы над C, существуют точки $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, в $C \setminus X$ такие, что $\det \|\psi_i(\zeta_j)\| \neq \neq 0$ (15). Очевидно, что ζ_j попарно неконгруэнтны по модулю Γ. Фиксируем произвольно j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Функция

$$H_j(z) = \psi(\zeta_j)\, h_1(z) + \cdots + \psi_n(\zeta_j) h_n(z) \qquad (16)$$

есть многочлен от производных функции φ. По лемме о логарифмической производной [5, с. 122] выполняется $T(r, H_j) \leqslant LT(r, \varphi)$, $r \notin E$ (17), E — множество конечной длины; L — достаточно большое натуральное число. Для каждого $j = 1, \ldots, n$ возьмем набор из $L+1$ попарно различных точек ζ_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant L+1$, конгруэнтных ζ_j по модулю Γ. Поскольку $\zeta_j \notin X$, то $\zeta_{ij} \notin X$ и в силу (14) выполняется

$$N(r, \zeta_{ij}, \varphi) \sim T(r, \varphi), \; j = 1, \ldots, n, \; i = 1, \ldots, L+1. \qquad (18)$$

Рассмотрим последовательность $(z_{lj})_{l=1}^{\infty} = Z_j$ точек, в которых функция φ принимает значения из множества $\{\zeta_{ij}\}_{i=1}^{L+1}$. Пусть $N(r, Z_j)$ — функция числа последовательности Z_j. Из (18) получаем $N(r, Z_j) \sim \sim (L+1)\, T(r, \varphi)$, $r \to \infty$. Подставляя любую точку $z_{lj} \in Z_j$ в соотношение (13), и учитывая, что $\varphi(z_{lj}) \equiv \zeta_j \pmod{\Gamma}$, а также (16), получаем, что $H_j(z_{lj}) = 0$. Следовательно, $N(r, 0, H_j) \geqslant (L+1) \times \times T(r, \varphi)$.

Вместе с (17) и неравенством Иенсена это дает $H_j(z) \equiv 0$. Соотношения (16) превращаются в однородную систему алгебраических линейных уравнений с определителем, отличным от нуля в силу (15). Следовательно, все функции $h_j(z)\equiv 0$. Противоречие доказывает теорему. Для дальнейшего нам потребуется

Лемма. Пусть k нечетно. Тогда множество мероморфных функций с полюсом в 0, удовлетворяющих уравнению (1), *конечно.*

Доказательство. Пусть одно из мероморфных решений д. у. (1) имеет в 0 полюс порядка n. Тогда по теореме 1 для одной из точек $M\in F$ над $y=\infty$ выполняется $q(M)=1+k/n$.

В окрестности точки M алгебраическая функция имеет разложение Пюизё $p(y)=y^q(a_0+a_1y^{-1/n}+\ldots)$ Мероморфное решение в окрестности 0 имеет вид

$$y(z)=c_0z^{-n}+c_1z^{-n+1}+\ldots,\quad c_0\neq 0. \tag{19}$$

Этот степенной ряд должен формально удовлетворять уравнению, полученному из разложения Пюизё

$$y^{(k)}(z)=a_0y^{1+k/n}+\ldots,\quad a_0\neq 0. \tag{20}$$

Коэффициенты в правой части (20) определяются уравнением (1). Покажем, что c_0 определяется конечным числом способов, а c_j при $j\geqslant 1$ определяется однозначно при заданном c_0. Имеем

$$y^{(k)}(z)=(-1)^k\left[\frac{(k+n-1)!}{(n-1)!}c_0z^{-n-k}+\frac{(k+n-2)!}{(n-2)!}c_1z^{-n-k+1}+\right.$$
$$\left.+\cdots+k!\;c_{n-1}z^{-k-1}\right]+k!\;c_{n+k}+\frac{(k+1)!}{1!}c_{n+k+1}z+\frac{(k+2)!}{2!}\times$$
$$\times\, c_{n+k+2}z^2+\ldots;\; y^{1+\frac{k}{n}}=z^{-k-n}\left(c_0^{1+\frac{k}{n}}+\left(\left(1+\frac{k}{n}\right)c_0^{\frac{k}{n}}c_1+\right.\right.$$
$$\left.+(\ldots)_1\right)z+\left(\left(1+\frac{k}{n}\right)c_0^{\frac{k}{n}}c_2+(\ldots)_2\right)z^2+\ldots+$$
$$\left.+\left(\left(1+\frac{k}{n}\right)c_0^{\frac{k}{n}}c_j+(\ldots)_j\right)z^j+\ldots\right.$$

Во второй формуле символ $(\ldots)_j$ означает конечную сумму произведений коэффициентов ряда (19), в которую не входит ни один коэффициент c_i с номером $i\geqslant j$. Приравнивая коэффициенты при z^{-k-n} в уравнении (20) получаем $(-1)^k\frac{(k+n-1)!}{(n-1)!}c_0=a_0c_0^{1+k/n}$.

Это уравнение относительно c_0 имеет конечное число ненулевых корней. Имеем

$$a_0c_0^{k/n}=(-1)^k\frac{(k+n-1)!}{(n-1)!}. \tag{21}$$

Далее получаем

$$(-1)^k\frac{(k+n-2)!}{(n-2)!}c_1=a_0c_0^{k/n}\left(1+\frac{k}{n}\right)c_1+(\ldots)_1. \tag{22}$$

Подставляя сюда найденное значение $a_0 c_0^{k/n}$ из (21), видим, что коэффициент при c_1 отличен от 0, ибо $(-1)^k \frac{(k+n-2)!}{(n-2)!} \neq (-1)^k \times \times \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!} \frac{k+n}{n}$. Таким образом, c_1 определяется из (22) однозначно. Аналогично обстоит дело со всеми коэффициентами c_j, $j < n+k$. Для коэффициента c_{n+k+j}, $j \geqslant 0$, имеем уравнение

$$\frac{(k+j)!}{j!} c_{n+k+j} = a_0 c_0^{k/n} \frac{n+k}{n} c_{n+k+j} + (\ldots)_{n+k+j}.$$

Снова подставляем значение $a_0 c_0^{k/n}$ из (21), и получаем, что множитель при c_{n+k+j} равен $\frac{(k+j)!}{j!} - (-1)^k \frac{(k+n)!}{n!}$ (23). Поскольку k нечетно, этот коэффициент отличен от 0 при всех j. Таким образом, все c_j определяются однозначно, если задан c_0, и лемма доказана.

Замечание. Из (23) видно, что при четном k коэффициент c_{2n+k} не определяется из уравнения (20). Поэтому рассуждение на с. 274 в статье [3] представляется неубедительным при четном k.

Теорема 3. *Пусть F рода 0; k нечетно, и мероморфное решение уравнения (1) имеет хотя бы один полюс. Тогда это решение принадлежит классу W.*

Доказательство. Предположим, что $y(z)$ — трансцендентная функция. По теореме 1, 3° $y(z)$ имеет бесконечное множество полюсов z_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$ Функции $y(z - z_j)$, $j = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют условиям леммы, поэтому в силу леммы среди них есть совпадающие. Следовательно, $y(z)$ — периодическая функция. Для удобства будем считать, что наименьший по модулю период функции $y(z)$ равен $2\pi i$ (это не уменьшает общности).

Рассмотрим полосу $D = \{z\colon 0 \leqslant \operatorname{Im} z < 2\pi\}$.

1-й случай. $y(z)$ ограничена в $D \cap \{z : |\operatorname{Re} z| > A\}$ при некотором $A > 0$. В частности, $y(z)$ имеет конечное число полюсов в D. Легко видеть, что $y(z)$ в этом случае принимает в D каждое комплексное значение конечное число раз. В силу периодичности $y(z)$ функция $R(z) = y(\ln z)$ однозначна в $\{z : 0 < |z| < \infty\}$. Эта функция принимает каждое значение конечное число раз, поэтому она рациональна. Следовательно, $y(z) = R(\exp z) \in W$.

2-й случай. $y(z)$ имеет бесконечное число полюсов в D. Повторяя рассуждение в начале доказательства с использованием леммы, получим, что функция $y(z)$ эллиптическая.

3-й случай. $y(z)$ имеет конечное число полюсов в D и неограничена в $D \cap \{z : |\operatorname{Re} z| > A\}$ при любом $A > 0$. Пусть, например, $y(z)$ неограничена в $\{z : \operatorname{Re} z > A\}$ при любом $A > 0$. Поскольку $y(z)$ периодична с периодом $2\pi i$, и полуплоскость $\{z : \operatorname{Re} z > A\}$ не содержит полюсов $y(z)$, эта функция принадлежит классу П

Ш. И. Стрелица [8, § 17]. Для $y(z)$ выполняется соотношение, аналогичное (7):

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ x\notin E}} L^{-k}(x)\frac{|y^{(k)}(\zeta)|}{S(x,\ y)} = 1. \tag{24}$$

Здесь $|y(\zeta)| = \max_{\operatorname{Re} z = x}|y(z)| = S(x,\ y)$, $L(x) = \dfrac{S'(x,\ y)}{S(x,\ y)}$.

E — множество конечной меры. Наша цель — доказать, что $L(x) = O(1)$, $x\to\infty$. Рассмотрим компоненту $G\subset\{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ множества $\{z: |y(z)| > \varepsilon^{-1}\}$, где $\varepsilon > 0$ настолько мало, что G не содержит полюсов функции $y(z)$. Компонента G переходит при отображении $f: \boldsymbol{C}\to F$ в окрестность некоторой точки $M\in F$, проектирующейся в $y=\infty$, причем M не имеет прообразов в $\boldsymbol{C}$. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, убедимся, что $q(M) = 1$. Поэтому в силу (2) в G выполняется $|y^{(k)}(z)| \sim |a(M)||y(z)|$, $y(z)\to\infty$ $a(M)\in\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$. Имеется конечное число точек M, проектирующихся в ∞, поэтому $|y^{(k)}(z)| \leqslant a_0|y(z)|$ при $|y(z)| > A$ **(25)** для некоторых постоянных a_0 и A, не зависящих от выбора компоненты G. Из (24), (25) следует, что $L(x) = O(1)$, $x\to\infty$.

Поскольку $L(x) = d/dx(\ln S(x,\ y))$, имеем $\ln S(x,\ y) = O(x)$. Отсюда и из периодичности y функции легко получаем $m(r,\ y) = O(r)$, $r\to\infty$, где $m(r,\ y)$ — неванлинновская функция приближения. Очевидно также, что $N(r,\ y) = O(r)$, $r\to\infty$, поскольку $y(z)$ имеет период $2\pi i$, и число полюсов в D конечно. Отсюда и из (26) получаем, что $T(r,\ y) = O(r)$, $r\to\infty$. Теперь по 1-й основной теореме Неванлинны $N(r,\ a,\ y) = O(r)$, $r\to\infty$ для всех $a\in\boldsymbol{C}$. В силу периодичности каждое значение принимается в D конечное число раз. Имеем опять 1-й случай.

Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Picard E.* Sur une propriété des fonctions d'une variable et sur une classe d'equations differentielles.— C. r. Acad. Sci, 1880, **91**, p. 1058—1060. 2. *Hille E.* Remarks on Briot — Bouquet differential equations I.— Comment. Math., 1978, **21**, p. 119—132; II — Math. Anal. Appl, 1978, p. 65. 3. *Hille E.* Higher order Briot — Bouquet differential equations.— Ark. mat., 1978, **16**, p. 271—286. 4. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.— М.: Физматгиз, 1960.—319 с. 5. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.—592 с. 6. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций.— М.— Л.: ГИТТЛ, 1948.—396 с. 7. *Гриффитс Ф., Кинг Дж.* Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий.—М.: Мир, 1976.— 96 с. 8. *Стрелиц Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений.— Вильнюс: Минтис, 1972.— 456 с.

Поступила в редколлегию 21.10.80.