УДК 517.9

Т. В. МИСЮРА

ХАРАКТЕРИСТИКА СПЕКТРОВ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ И АНТИПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ПОРОЖДАЕМЫХ ОПЕРАЦИЕЙ ДИРАКА. II

В первой части настоящей работы [1] были найдены необходимые условия, которым должны удовлетворять последовательности $\{\mu_{2k}^{\pm}\}$, $\{\mu_{2k+1}^{\pm}\}$ для того, чтобы они были спектрами соответственно периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых на сегменте $[0, \pi]$ одним и тем же оператором Дирака D вида

$$D\vec{y} = B\frac{d}{dx}\vec{y} + \Omega(x)\vec{y},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & r(x) \\ r(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

$p(x)$, $r(x)$ — вещественные периодические ($p(x) \equiv p(x+\pi)$); $r(x) \equiv \equiv r(x+\pi)$) — функции, принадлежащие пространству $L_2[0, \pi]$.

Для доказательства достаточности этих условий нам необходимо рассмотреть еще две краевые задачи, порождаемые тем же оператором D и краевыми условиями

$$y_1(0) = y_1(\pi) = 0; \tag{1}$$

$$y_1(0) = y_2(\pi) = 0. \tag{2}$$

Собственные значения $\{\lambda_k\}$ и $\{\nu_k\}$ этих краевых задач являются корнями их характеристических функций, которые равны соответственно $\omega_1(\lambda, \pi)$ и $\omega_2(\lambda, \pi)$, где $\vec{\omega}(\lambda, x) = (\omega_1(\lambda, x), \omega_2(\lambda, x))$ — решение уравнения $D\vec{y} = \lambda\vec{y}$ при начальных данных $\vec{\omega}(\lambda, 0) = (0,1)$. Решение $\vec{\omega}(\lambda, x)$ выражается через введенные в [1] решения $\vec{e}(\lambda, x) = (e_1(\lambda, x), e_2(\lambda, x))$ и $\vec{\bar{e}}(\lambda, x) = (\bar{e}_1(\lambda, x), \bar{e}_2(\lambda, x))$ следующим образом:

$$\vec{\omega}(\lambda, x) = \frac{1}{2i}\{\vec{e}(\lambda, x) - \vec{\bar{e}}(\lambda, x)\}. \tag{3}$$

Поскольку

$$\vec{e}(\lambda, x) = e^{i\lambda\pi}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\varphi_1(\lambda)\\ \varphi_2(\lambda)\end{pmatrix},$$

где $\varphi_j(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty)$ $(j = 1,2)$ — целые функции экспоненциального типа $\leqslant\pi$, то

$$\omega_1(\lambda, \pi) = -\sin\lambda\pi + \psi_1(\lambda), \quad \omega_2(\lambda, \pi) = \cos\lambda\pi + \psi_2(\lambda), \tag{4}$$

где $\psi_j(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty)$ $(j = 1, 2)$ — также целые функции экспоненциального типа $\leqslant\pi$.

Последовательности $\{\lambda_k\}$ и $\{\nu_k\}$ собственных чисел краевых задач (1) и (2) однозначно определяют оператор Дирака, т. е. матрицу $\Omega(x)$. Точнее говоря, имеет место следующая

Теорема II. *Две последовательности $\{\lambda_k\}$ и $\{\nu_k\}$ являются собственными значениями краевых задач* (1) и (2), *порождаемых одним и тем же оператором D, в том и только в том случае, если они перемежаются*:

$$\ldots < \lambda_k < \nu_{k+1} < \lambda_{k+1} < \nu_{k+2} < \lambda_{k+2} < \ldots \tag{5}$$

и удовлетворяют асимптотическим формулам

$$\lambda_k = k + \varepsilon_k, \ \nu_k = k - \frac{1}{2} + \delta_k, \ \sum\varepsilon_k^2 < \infty, \ \sum\delta_k^2 < \infty.$$

При этом оператор D восстанавливается по ним однозначно.

Доказательство этой теоремы в существенном проводится так же, как теорема 5.2 работы [2] с помощью обратной задачи теории рассеяния для оператора Дирака. При этом вместо леммы 3.3 работы [2] нужно воспользоваться следующей леммой, которая доказывается аналогично.

Лемма 4. Функции $u(z)$ и $v(z)$ допускают представления

$$u(z) = -\sin \pi z + f_1(z), \quad v(z) = \cos \pi z + f_2(z),$$

где

$$f_j(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}_j(x) e^{-izx} dx, \ \tilde{f}_j(x) \in L_2[-\pi, \pi] \ (j = 1, 2)$$

тогда и только тогда, когда

$$u(z) = -\pi \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(\lambda_k - z)}{k} (\lambda_0 - z), \quad v(z) = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(\nu_k - z)}{k - \frac{1}{2}}$$

и

$$\lambda_k = k + \varepsilon_k, \ \nu_k = k - \frac{1}{2} + \delta_k, \ \sum \varepsilon_k^2 < \infty, \ \sum \delta_k^2 < \infty.$$

Если нам известны собственные значения $\{\lambda_k\}$ только задачи (1), а также собственные значения $\{\mu_k^{\pm}\}$ периодической и антипериодической краевых задач, то оператор D однозначно по ним восстановить нельзя. Выясним, какие дополнительные сведения об этом операторе надо иметь для того, чтобы он восстанавливался однозначно.

В [1] было показано, что характеристические функции периодической и антипериодической краевых задач соответственно равны $\chi(\lambda) - 1$ и $\chi(\lambda) + 1$, где

$$\chi(\lambda) = \frac{1}{4i} \{[e_2(\lambda, \pi) + ie_1(\lambda, \pi)] - [\bar{e}_2(\lambda, \pi) - i\bar{e}_1(\lambda, \pi)]\}. \tag{6}$$

Кроме того, там же было доказано тождество

$$e_1(\lambda, x) \bar{e}_2(\lambda, x) - \bar{e}_1(\lambda, x) e_2(\lambda, x) = -2i. \tag{7}$$

Из (3), (6) и (7) при $x = \pi$ следует, что

$$4\chi(\lambda) \omega_2(\lambda, \pi) - 2\omega_2^2(\lambda, \pi) - 2i\omega_1(\lambda, \pi) \omega_2(\lambda, \pi) - \\ - 2\bar{e}_2(\lambda, \pi) \omega_1(\lambda, \pi) = 2.$$

Подставляя в последнее тождество корни λ_k функции $\omega_1(\lambda, \pi)$, получаем

$$[\omega_2(\lambda_k, \pi) - \chi(\lambda_k)]^2 = \chi^2(\lambda_k) - 1; \tag{8}$$

$$\chi(\lambda_k) = \frac{1}{2} \left[\omega_2(\lambda_k, \pi) + \frac{1}{\omega_2(\lambda_k, \pi)}\right] = \operatorname{sign} \omega_2(\lambda_k, \pi)(1 + \theta) \\ (\theta \geqslant 0). \tag{9}$$

Равенства (4), (8) и оценка (15) части I показывают, что, зная функцию $\chi(\lambda)$ и последовательность $\{\operatorname{sign}[\omega_2(\lambda_k, \pi) - \chi(\lambda_k)]\}$, мы можем восстановить функцию $\omega_2(\lambda, \pi)$ с помощью интерполяционной формулы

$$\omega_2(\lambda, \pi) = \chi(\lambda) + \omega_1(\lambda) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_k \sqrt{\chi^2(\lambda_k) - 1}}{\omega_1'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}, \tag{10}$$

где

$$\sigma_k = \operatorname{sign}[\omega_2(\lambda_k, \pi) - \chi(\lambda_k)].$$

Из леммы 4 следует, что функция $\omega_1(\lambda, \pi)$ выражается через собственные значения $\{\lambda_k\}$ по формуле

$$\omega_1(\lambda, \pi) = -\pi \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq \infty}}^{\infty} \frac{(\lambda_k - \lambda)}{k} (\lambda_0 - \lambda). \tag{11}$$

Из формулы (10) видно, что, зная функции $\omega_1(\lambda, \pi)$ и $\chi(\lambda)$, а также последовательность $\{\sigma_k\}$, можно восстановить функцию $\omega_2(\lambda, \pi)$, а следовательно, и собственные значения $\{\nu_k\}$ краевой задачи (2). Таким образом, из теоремы II следует, что оператор D однозначно восстанавливается по функциям $\omega_1(\lambda, \pi)$, $\chi(\lambda)$ и последовательности $\{\sigma_k\}$, причем функции $\omega_1(\lambda, \pi)$ и $\chi(\lambda)$ в свою очередь восстанавливаются по собственным значениям $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k^{\pm}\}$.

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы.

Теорема III. *Для того чтобы последовательность* $\{\mu_k^{\pm}\}$ *совпадала с множеством собственных значений периодической и антипериодической краевых задач, последовательность* $\{\lambda_k\}$ — *с множеством собственных значений краевой задачи* (1), *порождаемых одним и тем же оператором* D, *а последовательность* $\{\sigma_k\}$ $(\sigma_k = 1, -1, 0)$ — *с последовательностью* $\{\operatorname{sign}[\omega_2(\lambda_k, \pi) - \chi(\lambda_k)]\}$, *отвечающей тому же оператору* D, *необходимо и достаточно, чтобы существовали последовательность неотрицательных чисел* $\{h_k\}$, *удовлетворяющих условию* $\sum h_k^2 < \infty$, *и последовательность точек* $\{k\pi + ih_k^*\}$, *каждая из которых лежит на одном из берегов соответствующего разреза* $\operatorname{Re}\theta = k\pi$, $|\operatorname{Im}\theta| \leqslant h_k$, *составляющих в совокупности границу области*

$$\{\theta\} \setminus \bigcup_k \{\theta : \operatorname{Re}\theta = k\pi,\ |\operatorname{Im}\theta| \leqslant h_k\},$$

такие, что

$$\mu_k^{\pm} = z(k\pi \pm 0),\ \ \lambda_k = z(k\pi + ih_k^*),\ \ \sigma_k = \operatorname{sign} h_k^*,$$

где $z(\theta)$ — *аналитическое продолжение функции, обратной* $\theta(z)$, *а* $\theta(z)$ — *функция, конформно отображающая верхнюю полуплоскость на область*

$$\{\theta : \operatorname{Im}\theta > 0\} \setminus \bigcup_k \{\theta : \operatorname{Re}\theta = k\pi,\ \ 0 \leqslant \operatorname{Im}\theta \leqslant h_k\},$$

нормированная условием $\lim\limits_{z\to\infty}(\theta(z) - \pi z) = 0$.

При этом оператор D определяется последовательностями $\{h_k\}$ и $\{k\pi + ih_k^*\}$ однозначно.

Доказательство. Необходимость вытекает из первой части этой работы [1] и неравенств

$$\ldots < \mu_k^- \leqslant \lambda_k \leqslant \mu_k^+ < \mu_{k+1}^- \leqslant \lambda_{k+1} \leqslant \mu_{k+1}^+ < \ldots,$$

которые легко получить из неравенств (5) и формулы (9).

Достаточность. Если условия теоремы выполнены, то согласно теоремам 2.2 и 2.3 работы [2] функция

$$\tilde{\chi}(z) = \cos\theta(z)$$

представима в виде

$$\tilde{\chi}(z) = \cos z\pi + \tilde{\varphi}(z)$$

$$\left(\tilde{\varphi}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, e^{-izt} dt, \ \ \varphi(t) \in L_2[-\pi, \pi]\right) \tag{12}$$

и уравнение $\tilde{\chi}^2(z) - 1 = 0$ имеет только вещественные корни $\mu_k^{\pm} = z(k\pi \pm 0)$, причем

$$\mu_k^{\pm} = k + \varepsilon_k^{\pm}, \ \ \sum (\varepsilon_k^{\pm})^2 < \infty.$$

Поскольку

$$\lambda_k = z(k\pi + ih_k^*) \in [\mu_k^-, \ \mu_k^+],$$

то $\lambda_k = k + \delta_k$, где $\sum \delta_k^2 < \infty$, откуда, используя лемму 4, находим, что построенная по корням $\{\lambda_k\}$ с помощью формулы (11) функция $\omega_1(\lambda)$ имеет вид

$$\omega_1(\lambda) = -\sin\lambda\pi + \tilde{f}_1(\lambda)$$

$$\left(\tilde{f}_1(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\, e^{-i\lambda x} dx, \ \ f_1(x) \in L_2[-\pi, \ \pi]\right).$$

Так как функция

$$\tilde{\omega}_2(\lambda) = \tilde{\chi}(\lambda) + \tilde{\omega}_1(\lambda) \sum \frac{\sigma_k \sqrt{\tilde{\chi}^2(\lambda_k) - 1}}{\tilde{\omega}_1'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} \tag{13}$$

согласно формуле (12) и теореме 28 работы [3] имеет вид

$$\tilde{\omega}_2(\lambda) = \cos\lambda\pi + \tilde{f}_2(\lambda) \quad (\tilde{f}_2(\lambda) \in L_2(-\infty, \ \infty)),$$

то в силу леммы 4 ее корни $\tilde{\nu}_k$ удовлетворяют асимптотическим формулам

$$\tilde{\nu}_k = k - \frac{1}{2} + \tilde{\tau}_k, \ \sum \tilde{\tau}_k^2 < \infty. \tag{14}$$

Полагая в (13) $\lambda = \lambda_k$, получим

$$\tilde{\omega}_2(\lambda_k) = \tilde{\chi}(\lambda_k) + \sigma_k \sqrt{\tilde{\chi}^2(\lambda_k) - 1},$$

откуда вытекают такие равенства:

$$\operatorname{sign}\{\tilde{\omega}_2(\lambda_k) - \tilde{\chi}(\lambda_k)\} = \sigma_k, \quad \tilde{\chi}(\lambda_k) = \frac{1}{2}\left\{\tilde{\omega}_2(\lambda_k) + \frac{1}{\tilde{\omega}_2(\lambda_k)}\right\},$$

$$\operatorname{sign}\tilde{\omega}_2(\lambda_k) = \operatorname{sign}\tilde{\chi}(\lambda_k) = \operatorname{sign}\cos\theta(\lambda_k) = \\ = \operatorname{sign}\cos(k\pi + ih_k^*) = (-1)^k. \tag{15}$$

Из последнего равенства следует, что в каждом интервале $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ имеется хотя бы один корень $\tilde{\nu}_{k+1}$ функции $\tilde{\omega}_2(\lambda)$, а в силу (14) других корней она иметь не может.

Таким образом, последовательности $\{\lambda_k\}$ и $(\tilde{\nu}_k)$ удовлетворяют условиям теоремы II, согласно которой существует единственный оператор D, такой, что $\tilde{\omega}_1(\lambda)$ и $\tilde{\omega}_2(\lambda)$ являются характеристическими функциями краевых задач (1) и (2), порождаемых этим оператором.

Теорема будет полностью доказана, если мы установим, что характеристические функции периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых этим оператором D, равны $\tilde{\chi}(\lambda) \pm 1$.

Пусть $\chi_D(\lambda) \pm 1$ — характеристические функции периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых оператором D. Тогда в силу доказанного ранее

$$\chi_D(z) = \cos z\pi + \tilde{\varphi}_D(z) \quad (\tilde{\varphi}_D(z) \in L_2(-\infty, \infty)) \tag{16}$$

и согласно (9)

$$\chi_D(\lambda_k) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\omega}_2(\lambda_k) + \frac{1}{\tilde{\omega}_2(\lambda_k)}\right].$$

Отсюда в силу (15) следует, что $\tilde{\chi}(\lambda_k) = \chi_D(\lambda_k)$ или, учитывая (12), (16), $\tilde{\varphi}(\lambda_k) - \tilde{\varphi}_D(\lambda_k) = 0$. Следовательно, функция $F(z) = [\tilde{\varphi}_D(z) - \tilde{\varphi}(z)][\omega_1(z)]^{-1}$ — целая. Поскольку при $|z| \to \infty$

$$|\tilde{\varphi}_D(z) - \tilde{\varphi}(z)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} \eta(x)\, e^{izx} dx\right| \leqslant e^{|\operatorname{Im} z\pi|} o(1)$$

и $|\omega_1(z)| > Ce^{|\operatorname{Im} z\pi|}$ на неограниченно расширяющейся последовательности контуров K_n, ограничивающих квадраты $|\operatorname{Re} z| \leqslant n + \frac{1}{2}$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant n + \frac{1}{2}$, то

$$\lim_{n\to\infty} (\max_{z \in K_n} |F(z)|) = 0,$$

и по теореме Лиувилля $F(z) \equiv 0$. Следовательно, $\tilde{\varphi}_D(z) \equiv \tilde{\varphi}(z)$, а значит, $\tilde{\chi}_D(z) \equiv \tilde{\chi}(z)$, что и требовалось доказать.

Гладкость элементов $p(x)$, $r(x)$ матрицы $\Omega(x)$ зависит от скорости стремления к нулю последовательности h_k при $k \to \infty$, что вытекает из следующего уточнения теоремы III.

Теорема IV. *Пусть выполнены условия теоремы III. Для того чтобы $p(x)$ и $r(x)$ имели $n = 0, 1, 2 \ldots$ локально суммируемых с квадратом производных, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (k^n h_k)^2 < \infty. \tag{17}$$

Доказательство. Необходимость этого условия доказана в первой части (см. следствие теоремы 1 в [1]), а его достаточность при $n = 0$ установлена в предыдущей теореме. Доказательство достаточности при $n = 1$ опирается на следующее обобщение леммы 4, которое доказывается аналогично.

Лемма 5. *Функции $u(z)$ и $v(z)$ допускают представления*

$$u(z) = -\sin z\pi + A\pi \frac{4z}{4z^2 - 1} \cos z\pi + C_1 \frac{\sin z\pi}{z} + \frac{\tilde{f}_1(z)}{z},$$

$$v(z) = \cos z\pi - B\pi \frac{\sin z\pi}{z} + C_2 \frac{4z}{4z^2 - 1} \cos z\pi + \frac{\tilde{f}_2(z)}{z}$$

$$\left(\tilde{f}_j(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f_j(t) e^{izt} dt,\ f_j(t) \in L_2[-\pi, \pi],\ \int_{-\pi}^{\pi} f_j(t)\, dt = 0,\quad j = 1, 2\right) \tag{18}$$

в том и только в том случае, если

$$u(z) = -\pi(\lambda_0 - z) \prod_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - z)(z - \lambda_{-k}) k^{-2},$$

$$v(z) = \prod_{k=-\infty}^{\infty} (\nu_k - z)\left(k - \frac{1}{2}\right)^{-1},\ \lambda_k = k - \frac{A}{k} + \frac{\alpha_k}{k},$$

$$\nu_k = k - \frac{1}{2} - \frac{B}{k} + \frac{\beta_k}{k},\ \sum |\alpha|_k^2 < \infty,\ \sum |\beta|_k^2 < \infty.$$

Так как при $n \geqslant 1$ согласно теореме 2.5 работы [2] последовательности $\{\mu_k^{\pm} = z(k\pi \pm 0)\}$ и $\{\lambda_k \in [\mu_k^-, \mu_k^+]\}$ удовлетворяют асимптотическим формулам

$$\mu_k^{\pm} = k + \frac{C}{k} + \frac{\varepsilon_k^{\pm}}{k},\ \lambda_k = k + \frac{C}{k} + \frac{\delta_k}{k}\ \left(\sum (\varepsilon_k^{\pm})^2 < \infty,\ \sum \delta_k^2 < \infty\right), \tag{19}$$

то из леммы 5 вытекает, что

$$\omega_1(\lambda) = -\sin\lambda\pi - C\pi\frac{4\lambda}{4\lambda^2-1}\cos\lambda\pi + C_1\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda} + \frac{\tilde f_1(\lambda)}{\lambda},$$

$$\chi(\lambda) = \cos\lambda\pi + C\pi\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda} + C_2\pi\frac{4\lambda}{4\lambda^2-1}\cos\lambda\pi + \frac{\tilde g(\lambda)}{\lambda},$$

где $\tilde f_1(\lambda)$ и $\tilde g(\lambda)$ имеют вид (18). Используя эти формулы и формулу (10), находим также, что

$$\omega_2(\lambda) = \cos\lambda\pi + C_3\pi\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda} + C_4\pi\frac{4\lambda}{4\lambda^2-1}\cos\lambda\pi + \frac{\tilde f_2(\lambda)}{\lambda}.$$

Из этих формул и основного интегрального уравнения обратной задачи теории рассеяния следует, что функции $p(x)$ и $r(x)$ имеют в интервале $[0, \pi]$ суммируемую с квадратом производную. Отсюда, повторяя доказательство теоремы I работы [1], приходим к равенствам

$$\mu_k^{\pm} = k + \frac{C}{k} + \frac{\pm|Q(0) - Q(\pi)| + \tilde\varepsilon_k^{\pm}}{2\pi k}, \tag{20}$$

где

$$Q(x) = -r(x) + ip(x), \quad \sum(\tilde\varepsilon_k^{\pm})^2 < \infty.$$

Сравнивая равенства (19) и (20), находим, что $Q(0) = Q(\pi)$. Следовательно, периодически продолженные функции $p(x)$ и $r(x)$ $(p(x) \equiv p(x+\pi),\ \ r(x) \equiv r(x+\pi))$ имеют одну локально суммируемую с квадратом производную и достаточность условия (17) при $n = 1$ доказана.

Пусть теперь $n \geqslant 2$. Тогда согласно предыдущему функции $p(x)$ и $r(x)$ имеют $m \geqslant 1$, локально суммируемых с квадратом производных и по теореме 1 работы [1]

$$\overset{+}{\mu}_k - \overset{-}{\mu}_k = \left(\frac{4}{\pi}\left|\int_0^\pi Q^{(m)}(t)\,e^{-2ikt}dt\right| + \frac{\varepsilon_k^{\pm}}{k}\right)|k|^{-m}$$

$$\left(\sum(\varepsilon_k^{\pm})^2 < \infty\right).$$

Пользуясь этим равенством и повторяя доказательство следствия 4.2 теоремы 4.2 работы [2], приходим к неравенству $m \geqslant n$, что и требовалось доказать.

Список литературы: 1. *Мисюра Т. В.* Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака (I).— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 30. Харьков, 1978, с. 90—101. 2. *Марченко В. А., Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла.— «Мат. сб.», 1975, т. 97 (139), № 4 (8), с. 540—606. 3. *Левин Б. Я.* Целые функции. М., Изд-во МГУ, 1971. 124 с.

Поступила 3 июля 1976 г.