УДК 517.946

А. И. МИЛОСЛАВСКИЙ

К ТЕОРИИ ФЛОКЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Из теоремы Флоке для системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами следует, что всякое решение такой системы можно представить в виде линейной комбинации решений Флоке. В настоящей заметке получен бесконечномерный аналог этого представления для абстрактного параболического уравнения с периодическим операторным коэффициентом. Сформулированные ниже теоремы и утверждения (подробные доказательства которых имеются в [1, 2]) уточняют и дополняют полученные ранее автором результаты [2, 3]. Даны приложения к некоторым классам параболических уравнений.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{du}{dt} + Au = B(t)A^{\alpha}u \ (t > 0), \ u(0) = u_0. \qquad (1)$$

Относительно операторов в уравнении (1) в случае гильбертова пространства H будем предполагать следующее:

a) оператор A самосопряжен и положителен, оператор A^{-1} вполне непрерывен;

b) оператор A^{α} является дробной степенью оператора A $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$;

c) ограниченная, ω — периодическая оператор-функция $B(t)$ удовлетворяет условию Гельдера

$$\| B(t) - B(s) \| \leqslant K |t - s|^{\delta}$$

(K, δ — положительные постоянные, не зависящие от s, t).

К уравнениям вида (1) приводят многие задачи математической физики. Так, при линеаризации уравнения Навье-Стокса на периодическом режиме получается уравнение, представимое, как показано В. И. Юдовичем [4], в виде (1).

Под решением задачи Коши (1) понимается непрерывная при $t \geqslant 0$ дифференцируемая при $t > 0$ вектор-функция $u(t) \in D(A)$ $(t > 0)$, такая, что $u(0) = u_0$ и вектор-функция $Au(t)$ непрерывна при $t > 0$.

Можно доказать [5] (см. также [1]), что при выполнении условий а) — с) задача Коши (1) корректна, в частности, существует эволюционный оператор $U(t)$, такой, что всякое решение задачи Коши (1) представляется в виде $u(t) = U(t)u_0$. Операторы $U(t)$ вполне непрерывны при $t > 0$. Оператором монодромии называется оператор $U = U(\omega)$.

Решениями Флоке называются решения $u(t)$ уравнения (1), имеющие вид $u(t) = U(t)u_0$, где u_0 — корневой вектор оператора U. Нетрудно проверить, что решения Флоке имеют вид

$$u(t) = e^{\sigma t} \sum_{n=0}^{e} t^n w_n(t), \quad w_n(t+\omega) = w_n(t),$$

где число σ связано с собственным числом ρ оператора U (мультипликатором Флоке), которому отвечает корневой вектор u_0 зависимостью $\exp(\sigma\omega) = \rho$.

Из ограниченности нормы оператора $U(t)$ по t на всяком отрезке $[0, T]$ $(T > 0)$ и соотношения $U(t+\omega) = U(t)U(\omega)$ следует, что вопрос о полноте либо базисности решений Флоке в пространстве решений уравнения (1) сводится к изучению вопроса о полноте либо (соответственно) базисности системы корневых векторов оператора U в пространстве H.

2. Введем некоторые обозначения. Пусть $\{\dot{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(\{\tilde{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty})$ — собственные числа оператора A, занумерованные без учета (с учетом) их кратности. Положим

$$\varepsilon = \lim_{n\to\infty} \lambda_{n+1}^{\alpha} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^{-1}, \; b = \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \| B(t) \|. \tag{2}$$

Теоремы 1. [1], [2]. *Пусть выполняются условия а) —с). Тогда корневые векторы оператора U: 1) полны в пространстве H при условии*

$$2b\varepsilon < 1; \tag{3}$$

*2) образуют базис со скобками * в пространстве H при условии*

$$4b\varepsilon < 1; \tag{4}$$

*3) образуют базис Бари со скобками * в пространстве H при условии $\varepsilon = 0$; 4) если выполняются условие*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{n+1}^{\alpha} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^{-1} = 0$$

и собственные числа оператора A простые, начиная с некоторого, то алгебраическая кратность собственных чисел оператора U равна 1, начиная с некоторого; корневые векторы оператора U образуют базис в пространстве H.

Теорема 2. [1, 2]. *Пусть выполняются условия а) —с) и*

$$4b \varlimsup_{n\to\infty} \lambda_{n+1}^{\lambda} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^{-1} < 1^*. \tag{5}$$

* Определение базиса со скобками и базиса Бари см., например, в [6]. Ю. Ф. Коробейник обратил внимание автора на то, что в формуле (5) вместо lim можно писать $\varlimsup$.

Тогда для мультипликаторов Флоке $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$, *сосчитанных столько раз, какова их кратность, выполняется неравенство*

$$\left|\frac{1}{\omega}\ln\frac{1}{|\rho_n|}-\tilde{\lambda}_n\right|\leqslant b\tilde{\lambda}_n^{\lambda}\quad (n\geqslant n_0).$$

Из этого неравенства непосредственно следует асимптотическая формула

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|\rho_n|}{\tilde{\lambda}_n}=-\omega.$$

3. В качестве приложения теоремы 1 рассмотрим уравнение в пространстве $L_2(D)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(-\Delta)^m u=\sum_{|\gamma|<r} b_\gamma(t,x)D^\gamma u\ (t>0); \tag{6}$$

$$u(0,x)=u_0(x), \tag{7}$$

на границе области D функция u вместе со своими $(m-1)$ производными по нормали обращается в 0 с ограниченными по t, x коэффициентами $b_\gamma(t,x)$ $(|\gamma|\leqslant r)$, удовлетворяющими условию Гельдера по t,

$$b_\gamma(t+\omega,x)=b_\gamma(t,x)\ (|\gamma|\leqslant r),\ u=u(t,x), \tag{8}$$

$x\in D$ — ограниченная область в пространстве R^n с достаточно гладкой границей. Можно показать [1], что задача Коши представляется в виде (1), где в качестве оператора A выступает оператор $(-\Delta)^m$, слагаемые в правой части уравнения (6) записываются в виде $B(t)A^\alpha u$ с $\alpha=\frac{r}{2m}$, где оператор-функция $B(t)$ удовлетворяет условию с). Из известной асимптотической формулы для собственных чисел $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора $A=(-\Delta)^m$

$$\lambda_k\sim\varkappa(\operatorname{mes}D,\ n,\ m)\,k^{\frac{2m}{n}}\quad(\varkappa>0) \tag{9}$$

следует, что теорема 1 применима в случае $2m\geqslant n$, причем в случае $2m>n$ не накладывается никаких ограничений на величину коэффициентов при младших членах. Наибольший порядок r младших членов, допускаемый формулами (2), (3), равен $r=2m-n$.

Теорема 3 [1]. *При сформулированных выше условиях на коэффициенты* $b_\gamma(t,x)$ $(|\gamma|\leqslant r)$ *существует бесконечное множество мультипликаторов Флоке задачи Коши* (6) — (8), *всякое решение задачи Коши* (6) — (8) *раскладывается в ряд со скобками по решениям Флоке, сходящийся равномерно на каждом отрезке вида* $[0,T]$ $(T>0)$, *если* $2m>n$, $0\leqslant r<2m-n$.

Автору неизвестно, останется ли справедливым утверждение теоремы в случае $2m<n$ или $2m>n$, $2m>r\geqslant 2m-n$.

4. Задача об устойчивости периодического по времени параллельного течения вязкой несжимаемой жидкости в канале приводит к следующей системе уравнений [4]:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{u}, \nabla)\vec{V} + (\vec{V}, \nabla)\vec{u} = -\nabla P + \Delta\vec{V}; \tag{10}$$

$$\operatorname{div}\vec{V} = 0, \quad \vec{V}\Big|_{\partial D} = 0; \tag{11}$$

$$\vec{V}\Big|_{t=0} = \vec{V}_0(x, y). \tag{12}$$

В уравнении (10) $\vec{u} = (u(t, y), 0)$ — течение, устойчивость которого исследуется; $\vec{V} = (V_1(t, x, y), V_2(t, x, y))$ — поле скоростей течения жидкости; P — давление; D — полоса $\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, -\infty < x < \infty\}$.

Предположим, что P и $\vec{u}$ периодичны по x с периодом $2\pi/\alpha_0$. Ограничимся поэтому рассмотрением задачи (10) — (12) в области $D_0 = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi/\alpha_0\}$.

Теорема 4 [1]. *Предположим, что $u(t, y)$, $u_y(t, y)$ — ограниченные, измеримые при каждом фиксированном t, удовлетворяющие условию Гельдера:*

$$\sup_{0 \leqslant y \leqslant 1} |u(t, y) - u(s, y)| + |u_y(t, y) - u_y(s, y)| \leqslant K|t - s|^\delta$$

(K, δ — положительные постоянные, не зависящие от t, s), ω — периодические по t функции. Тогда всякое решение $\vec{V}$ системы (10) — 12) на конечном промежутке времени с любой точностью можно приблизить по норме H_2D_0 линейными комбинациями решений вида*

$$(\vec{V}_{n,m}(t, y) + t\vec{\omega}_{n,m}(t, y)) \exp(im\alpha_0 x + \sigma_{n,m}t),$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$, $\vec{V}_{n,m}(t, y)$, $\vec{w}_{n,m}(t, y)$ — ω-периодические по t векторные функции. Для чисел $\operatorname{Re}\sigma_{n,m}$ ($n = 1, 2, \ldots$) при каждом фиксированном $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ справедлива формула

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{Re}\sigma_{n,m}}{n^2} = 2\pi^2\omega.$$

Теорема 4 является следствием теорем 1, 2.

Замечание 1. В случае, когда оператор-функция $B(t)$ лишь кусочно непрерывна по t, все утверждения, сформулированные выше, сохраняют силу, если только решение задачи Коши (1) понимать в обобщенном смысле [1], т. е. как решение некоторого операторного интегрального уравнения, ассоциированного с уравнением (1).

* Пространство $H_2(D_0)$ — гильбертово пространство двухкомпонентных векторных функций в области D_0 по лебеговой мере.

Замечание 2. Условие (3) теоремы 1 оказывается в существенном неулучшаемым, если уравнение (1) рассматривать в классе кусочно-непрерывных коэффициентов $B(t)$. По этому поводу см. заметку [7], где приведен соответствующий пример.

Замечание 3. Имеет место аналог теоремы 1 в случае, когда уравнение (1) рассматривается в банаховом пространстве. В этом случае следует предположить, что оператор A порождает аналитическую полугруппу.

Автор благодарен В. И. Юдовичу за научное руководство и В. Э. Кацнельсону за советы.

Список литературы: 1. *Милославский А. И.* Теория Флоке для абстрактных параболических уравнений с периодическими коэффициентами. Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 1976. 15 с. 2. *Милославский А. И.* К теории Флоке для абстрактных параболических уравнений. Базисность корневых подпространств оператора монодромии. Депонировано в ВИНИТИ от 23 окт. 1975 г., № 3073—75. РЖ Математика, 1976, № 2, 2Б722, с. 37. 3. *Милославский А. И.* К теории Флоке для параболических уравнений.— «Функц. анализ», 1976, т. 10, вып. 2, с. 80—81. 4. *Юдович В. И.* Об устойчивости автоколебания жидкости.— «ДАН СССР», 1970, т. 195, № 3, с. 575—579. 5. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховых пространствах.— «Труды Моск. мат. о-ва», 1961, т. 10, с. 297—350. 6. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию несамосопряженных операторов. М., «Наука», 1967. 458 с. 7. *Милославский А. И.* Об убывании решений абстрактного параболического уравнения с периодическим операторным коэффициентом.— «Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки», 1976, т. 2, с. 12—15.

Поступила 16 мая 1975 г.