УДК 517.56

И. И. МАРЧЕНКО

РОСТ МЕРОМОРФНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть S — мероморфная минимальная поверхность (м. м. п.), представленная вектором $\vec{X}(z) = \{X_1(u, v), X_2(u, v), X_3(u, v)\}$ $(z = u + iv)$ (см. [1]). В работах [1—3] были введены и исследованы величины, характеризующие рост и распределение значений м. м. п. в R^3. Напомним их. Обозначим через $n(t, a, S)$ число a точек поверхности S в круге $K(0, t) = \{z : |z| < t\}$. Для фиксированной точки $a \in R^3$ положим

$$m(r, a, S) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{\| \vec{X} re^{i\Theta}) - a \|} d\Theta;$$

$$m(r, \infty, S) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \| \vec{X}(re^{i\Theta}) \| d\Theta;$$

$$N(r, a, S) = \int_0^r \frac{n(t, a, S) - n(0, a, S)}{t} dt + n(0, a, S) \ln r,$$

где

$$\| \vec{X} \|^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2.$$

Функция $T(r, S) = m(r, \infty, S) + N(r, \infty, S)$ называется характеристикой роста м. м. п. S. С помощью этой функции естественным образом определяется порядок и нижний порядок поверхности S. Величина

$$\delta(a, S) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{m(r, a, S)}{T(r, S)}$$

называется дефектом м. м. п. S относительно точки a в смысле Р. Неванлинны, а множество $D(S) = \{a : \delta(a, S) > 0\}$ — множеством дефектных значений м. м. п. Для фиксированной точки $a \in R^3$ положим

$$L(r, a, S) = \max_{|z|=r} \frac{1}{\| \vec{X}(z) - a \|};$$

$$L(r, \infty, S = \max_{|z|=r} \ln^{+} \| \vec{X}(z) \|;$$

$$\beta(a, S) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{L(r, a, S)}{T(r, S)}; \quad \Delta(a, S) = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{m(r, a, S)}{T(r, S)}.$$

Величину $\beta(a, S)$ назовем величиной отклонения м. м. п. относительно точки a, а $\Delta(a, S)$ — величиной дефекта м. м. п. в смысле Ж. Валирона. Множество $E_v(S) = \{a : \Delta(a, S) > 0\}$ естественно назвать множеством валироновских дефектных значений м.м.п., а множество $\Omega(S) = \{a : \beta(a, S) > 0\}$ — множеством положительных отклонений поверхности S.

Обозначим при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и $0 \leqslant \Delta \leqslant 1$

$$M(\Delta) = \left\{\lambda : 0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5 \text{ и } \sin\frac{\pi\lambda}{2} \leqslant \sqrt{\frac{\Delta}{2}}\right\};$$

$$B(\lambda, \Delta) = \begin{cases} \pi\lambda\left(\Delta \operatorname{ctg} \pi\lambda + \operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2}\right), & \text{если } \lambda \in M(\Delta), \\ \pi\lambda\sqrt{\Delta(2-\Delta)}, & \text{если } \lambda \,\overline{\in}\, M(\Delta), \end{cases}$$

Основные результаты работы.

Теорема 1. *Пусть λ — нижний порядок м. м. п. S. Тогда для любой фиксированной точки $a \in R^3$ $\beta(a, S) \leqslant B(\lambda, \Delta)$ (1.1), где $\Delta = \Delta(a, S)$. Если $\Delta(a, S) = 1$, то в этом случае оценка (1.1) является точной, в том смысле, что верна*

Теорема 2. *Для любого $0 \leqslant \lambda < \infty$ существует м. м. п. S нижнего порядка λ, такая, что $\beta(\infty, S) = B(\lambda, 1)$* **(1.2)**.

Теорема 3. *Для любой м. м. п. конечного нижнего порядка множество $\Omega(S)$ не более чем счетно.*

Теорема 4. *Если м. м. п. S имеет нулевой нижний порядок, то тогда $\sum_{(a)} \beta(a, S) \leqslant 2$,*

Теорема 5. *Пусть S м. м. п.* и Π — *двумерная плоскость в R^3. Тогда множества $E_v(S) \cap \Pi$, $\Omega(S) \cap \Pi$ имеют логарифмическую емкость нуль.*

Теорема 6. *Для любой мероморфной функции $f(z)$ нижнего порядка λ и любого комплексного числа a существует м. м. п. $S = S_\lambda(f)$ нижнего порядка λ и $a' = a'(a) \in R^3$, для которых**

$$\delta(a', S) \geqslant \frac{1}{3}\delta(a, f), \; \Delta(a', S) \geqslant \frac{1}{3}\Delta(a, f),$$

$$\beta(a', S) \geqslant \frac{1}{3}\beta(a, f).$$

Следствие 1. *Для любого $0 \leqslant \lambda < \infty$ существует м. м. п. S нижнего порядка λ, для которой множество $E_v(S)$ имеет мощность континуум.*

---

* Шести различным значениям $a \in C$ соответствуют, по крайней мере, две различные точки $a' \in R^3$.

Следствие 2. *Существует м. м. п. бесконечного нижнего порядка, для которой $\Omega(S)$ имеет мощность континуум.*

Следствие 3. *При $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ и $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ ряды*

$$\sum_{(a)} \delta^{\alpha}(a, S), \quad \sum_{(a)} \beta^{\gamma}(a, S)$$

могут расходиться.

Теорема 7. *Предположим, что S м. м. п. — в конечной плоскости и имеет нижний порядок λ, где $0 < \lambda < \infty$. Тогда при $\alpha > \frac{1}{3}$ имеет место*

$$\sum_{(a)} \delta^{\alpha}(a, S) < A(\alpha, \lambda),$$

где $A(\alpha, \lambda)$ зависит только от α и λ.

Для доказательства теоремы 1 нам потребовалось получить представление $\ln\|\vec{X}(z)\|$ в секторе $d(R, \alpha) = \{z \ |z| < R, |\arg z| < < \alpha\}$, которое является аналогом соответствующего представления для мероморфных функций (см. [3], [8]). Теорему 1 мы получили, исходя из этого представления и метода работы [5] (см. также [8]).

Отметим, что доказательства теорем 3, 4, 5, 7, кроме всего прочего, используют методы работ [4], [8], [9], [6].

Чтобы получить теорему 6, достаточно рассмотреть м. м. п.:

$$S(f) = \{\operatorname{Re}[3f(z) - f^3(z)], \quad \operatorname{Re} i[3f(z) + f^3(z)], \quad \operatorname{Re} 3f^2(z)\}$$

и точку

$$a' = \{\operatorname{Re}(3a - a^3), \quad \operatorname{Re} i(3a + a^3), \quad \operatorname{Re} 3a^2\}.$$

Следствия 1, 2, 3, вытекают из теоремы 6 и соответствующих теорем для мероморфных функций (см. [6, 7]).

Нетрудно проверить, что м. м. п. $S(E_\lambda(z))$, где $E_\lambda(z)$ — функция Миттаг—Леффлера [7], удовлетворяет соотношению (1.2). Это доказывает теорему 2.

Следует отметить, что основные результаты этой работы переносятся с незначительным изменением на двумерные м. м. п. в R^n.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. П. Петренко за постановку задачи и руководство работой.

Список литературы: 1. *Bechenbach E. F., Hutchison G. A.* Meromorphic minimal surfaces.— «Pac. Jorn of Math.», 1969, vol. 28, N 1, p. 17—47. 2. *Bechenbach E. F., Cootz T. A.* The second fundamental theorem for meromorphic minimal surfaces.— «Bull. Amer. Math. Soc.», 1970, vol. 76, p. 711—716. 3. *Bechenbach E. F., Hutchison G. A.* Meromorphic minimal surfaces.— «Bùll. Amer. Math. Soc.», 1962, vol. 68, N 5, p. 519—522. 4. *Петренко В. П., Хуссайн М.* О росте целых кривых.— «Изв. АН СССР сер. мат.», 1973, т. 37, № 2, с. 466—477. 5. *Fuchs W. H. J.* Topics in Nevanlinna theory.— «Proc. of the NRL Conference on classical Tunction Theory», 1970, p. 1—32. 6. *Хейман У. К.* Мероморфные функции. М., «Мир», 1966. 240 с. 7. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука».

1970. 591 с. 8. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка.— «Изв. АН СССР, сер. мат.», 1969, т. 33, № 2, с. 20—25. 9. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М., Гостехиздат, 1941. 388 с. 10. *Петренко В. П.* Изучение структуры множества положительиых отклонений мероморфных функций. II.— «Изв. АН СССР, сер. мат.», 1970, т. 34, № 1, с. 30—34.

Поступила 6 сентября 1975 г.